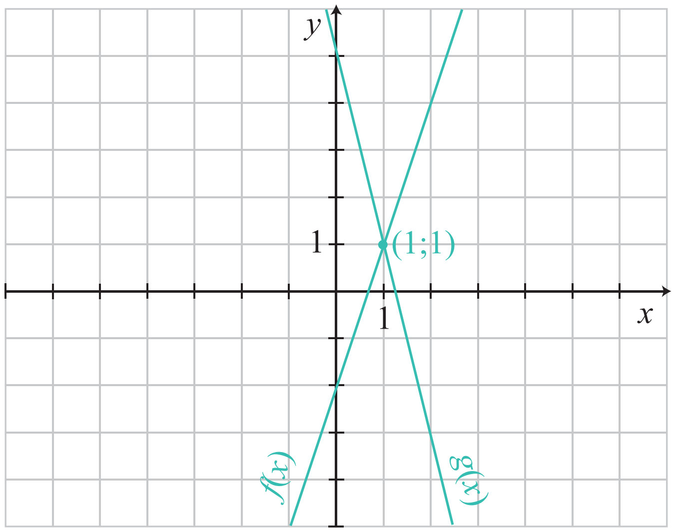
48. Egyenletek megoldási módszerei I.

1. a) $f(x)=3x-2$,

$g(x)=5-4x$

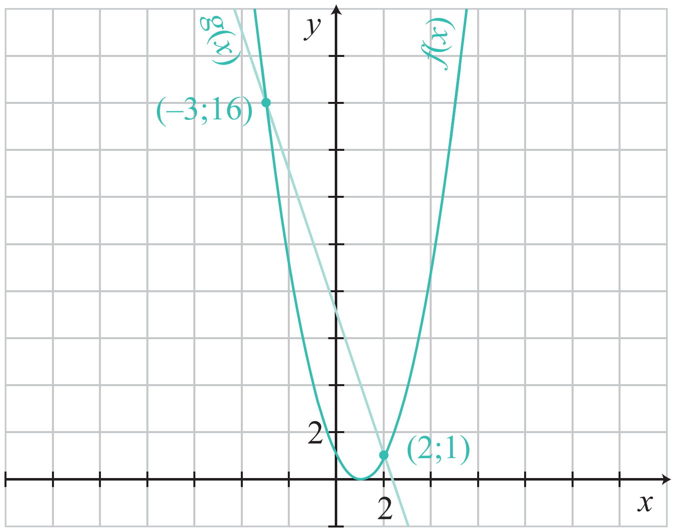
$\Rightarrow\ M=\{1\}$.



b) $f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$,

$g(x)=7-3x$

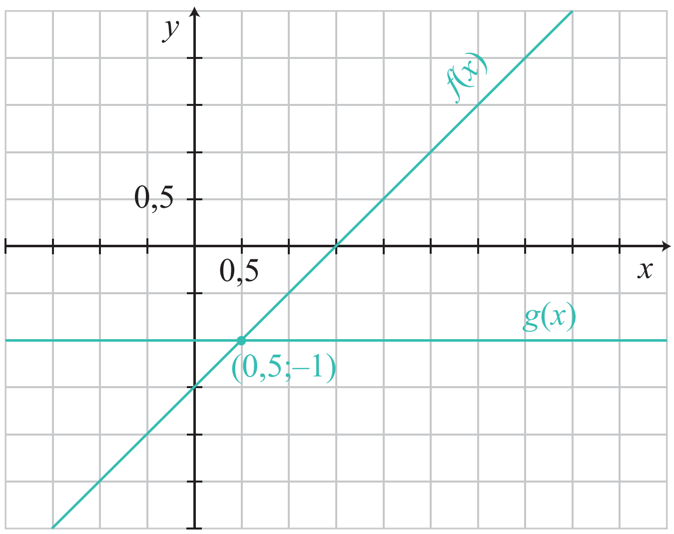
$\Rightarrow\ M=\{-3, 2\}$.



c) $f(x)=\dfrac{2x-3}{2}=x-\dfrac{3}{2}$,

$g(x)=-1$

$\Rightarrow\ M=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.



2. a) $M=\{-5;3\}$;

b) $\left(3^4-(2x)^4\right)(5+x)^2=0$

$\left(9+4x^2\right)(3-2x)(3+2x)(5+x)^2=0$

$M=\{-5\}$;

c) $\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+3)=(x+3)^2$

$\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+3)-(x+3)^2=0$

$(x+3)\left(x-\frac{1}{3}-x-3\right)=0$

$M=\{-3\}$.

3. a) $3(x-4)(7-5y)-(4-x)=0$

$(x-4)(21-15y+1)=0$

$(x=4 \text{ és } y\in\mathbb{R})$ vagy $\left(x\in\mathbb{R} \text{ és } y=\frac{22}{15}\right)$;

b) $2x^2\left(x^2+6x+9\right)=0$

$2x^2(x+3)^2=0$

$x_1=0,\ x_2=-3$;

c) $2(x+5)(x+1)+(x+5)(x-2)=3(x+5)(3x-1)$

$(x+5)(2x+2+x-2-9x+3)=0$

$(x+5)(3-6x)=0$

$x_1=-5,\ x_2=\frac{1}{2}$.

4. a) Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Az egyenlet mindkét oldalát $(x-2)$-vel megszorozva, majd 5-tel elosztva az $x=2$ összefüggést kapjuk, ami hamis megoldás, vagyis $M=\varnothing$.

b) Mivel $x^2-x=x(x-1)$, ezért az értelmezési tartomány $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. Az egyenlet mindkét oldalát $x(x-1)$-gyel szorozva:
$2-x+1=x+1 \Rightarrow x=1$, ami hamis megoldás, vagyis $M=\varnothing$.

c) Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Az egyenlet mindkét oldalát $(x-1)$-gyel szorozva:

$$1+(2x-1)(x-1)=x-1+2x-x^2$$

$$2-3x+2x^2=-1+3x-x^2$$

$$3\left(x^2-2x+1\right)=3(x-1)^2=0$$

$x=1$, ami hamis megoldás, vagyis $M=\varnothing$.

5. a) Értelmezési tartomány vizsgálat: $x \geq 4$ és $x \neq 4$ és $x \leq 4$, vagyis $M = \varnothing$.

b) Értelmezési tartomány: $x \geq -1$. Alakítsuk mindkét gyökjel alatti kifejezést teljes négyzetté!

$$\sqrt{\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{x+1}\right)^2} = 2$$

$$1+\sqrt{x+1}+\left|1-\sqrt{x+1}\right| = 2$$

$$1-\sqrt{x+1} \geq 0$$

$$x \leq 0$$

Így $M = \{x \mid x \in [-1;0]\}$.

c) $x \leq a$ és $x \geq b$ és $a \geq b \Leftrightarrow a = b = x$.

6. Legyen a hajó „hossza” x csapás, sebessége a kenu sebességének n-szerese!

A) Ha $(0<)n<1$ (ekkor gyorsabban haladnak a hajónál és utolérik azt), akkor a hajó hossza $x = 150 - 150n = 30n + 30$, mivel azonos mindkét vízi jármű iránya.

Amiből $n = \dfrac{2}{3}$ és $x = 50$ csapás.

B) Ha $n > 1$ (ekkor a hajó halad gyorsabban, és éri utol a kenut), akkor $x = 150n - 150 = 30n + 30$, így $n = \dfrac{3}{2}$ és $x = 75$ csapás.

Az álló hajó mellett 50 vagy 75 csapással halad el a kenu.

7. A nevező nem lehet 0, vagyis $|a+b| \neq |c|$, $|a-b| \neq |c|$.

$$(x+2ab)\left[\frac{1}{(a+b)-c} - \frac{1}{(a+b)+c}\right] = (2ab-x)\left[\frac{1}{c+(b-a)} + \frac{1}{c-(b-a)}\right]$$

$$(x+2ab)\frac{a+b+c-a-b+c}{(a+b)^2-c^2} = (2ab-x)\frac{c-b+a+c+b-a}{c^2-(b-a)^2}$$

$$cx\left[c^2-(b-a)^2+(a+b)^2-c^2\right] = 2abc\left[(a+b)^2-c^2-c^2+(b-a)^2\right]$$

$$abcx = abc\left(a^2+b^2-c^2\right)$$

Az értelmezési tartomány figyelembevételével:
ha $abc = 0$, akkor $x \in \mathbb{R}$;
ha $abc \neq 0$, akkor $x = a^2+b^2-c^2$.