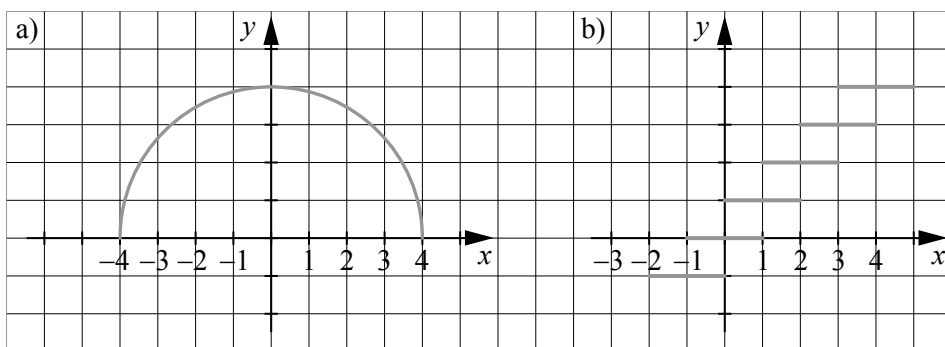


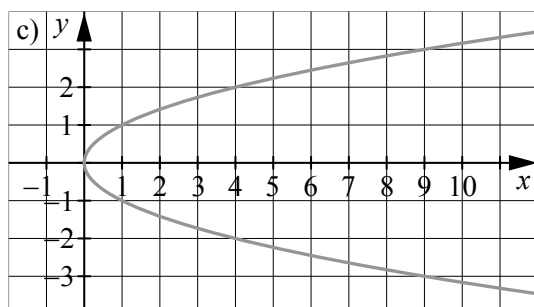
1. feladatsor



I. rész

1. Döntse el, hogy a következő állítások közül melyik igaz és melyik hamis!
 - a) Ha két egész szám összege páratlan, akkor a szorzatuk páros. **1 pont**
 - b) Ha egy egész szám osztható 4-gyel és 6-tal is, akkor osztható 24-gyel is. **1 pont**
2. Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 2 : 5. Mekkora a háromszög hegyesszögei? **2 pont**
3. Határozza meg a $[-3; 5[$ intervallumon értelmezett $f(x) = 4 - |x|$ függvény értékkészletét! **3 pont**
4. Mivel egyenlő $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ha $x + \frac{1}{x} = 5$? **3 pont**
5. Hány számjegyű a $(10^4)^7 + (10^5)^6$ tízes számrendszerbeli alakja? **3 pont**
6. Egy négyszög minden oldala 25 cm, és az egyik átlója 30 cm. Mekkora a négyszög területe? **4 pont**
7. Egy 40 fős társaság 60%-a fiú. Hány lánynak kell érkeznie még, hogy a társaság 60%-a legyen lány? **3 pont**
8. Az alábbiak közül melyik lehet egy függvény grafikonja? **2 pont**



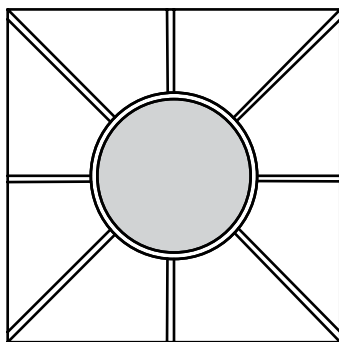


9. Az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ halmaznak hány olyan eleme van, mely relatív prím 2010-hez? **3 pont**
10. Ábrázolja számegyenesen a $\sqrt{x+2} < 2$ egyenlőtlenséget teljesítő valós számokat! **3 pont**
11. Ha 2 favágó 1 nap alatt 10 m^3 fát vág ki, akkor hány favágó vág ki 4 nap alatt 100 m^3 fát? **2 pont**



II./A rész

12. Hét egymást követő egész szám közül az első 4 négyzetének összege egyenlő a következő 3 négyzetének összegével. Melyek ezek a számok? **12 pont**
13. Az irányítótorny 20 magasan levő ablakából a 350 m magasságban közeledő vitorlázó repülőt $12,7^\circ$ -os emelkedési szögben látjuk. Állandó magasságban repülve a gép 300 m-t tett meg a torony felé. Mekkora emelkedési szögben látjuk most a gépet? **12 pont**
14. Egy négyzet alakú park közepén kör alakú kis tó található. A tó területe fele a körülötte levő füves rész területének.
- Mekkora a tó átmérője, ha a park oldalai 60 m hosszúak? **5 pont**
 - Az ábrán látható módon sétányokat készítenek a parkban. Hány méter a teljes úthálózat hossza?
(A tó körül is vezet út.) **7 pont**



II./B rész

- 15.** Egy 35 fős osztály 3 feladatból álló dolgozatot írt matematikából. A javítás után a következőket állapította meg a tanár: Az első és a harmadik feladatot 20-an, a második és a harmadik feladatot 8-an tudták megoldani. Csak az első, illetve csak a második feladat 2-2 tanulónak lett jó. Az első vagy második példát 29-en oldották meg jól. Ugyanennyien voltak, akiknek sikerült a harmadik feladat megoldása. Hibátlan dolgozat mindössze 3 darab volt.
- Hány tanuló van, aki pontosan 2 feladatot oldott meg jól? **8 pont**
 - Hányan nem tudtak egyetlen feladatot sem megoldani? **4 pont**
 - A diákok hány százaléka oldott meg legfeljebb egy példát jól? **5 pont**
- 16.** Egy egyenlő szárú háromszög szára 20 cm, az alaphoz tartozó magassága 16 cm.
- Mekkora a szárhoz tartozó magasság? **5 pont**
 - Számítsa ki a háromszög köré írható kör sugarát! **6 pont**
 - Egy hozzá hasonló háromszög területe 44%-kal nagyobb. Mekkora ez utóbbi háromszög köré írható kör sugara? **6 pont**
- 17.** Két egymásra merőleges úton a kereszteződés felé halad egy-egy autó $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, illetve $18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel. A gyorsabb autó 1480 m távolságra van a kereszteződéstől, amikor a lassabb 1260 m-re.
- Mennyi idő múlva lesz a gyorsabb autó kétszer olyan messze a kereszteződéstől, mint a lassabb? **6 pont**
 - Milyen távol van egymástól a két autó, amikor a lassabb 360 m-re van a kereszteződéstől? **6 pont**
 - Adja meg a két autó egymástól való távolságát az idő függvényében addig, amíg az első autó eléri a kereszteződést! **5 pont**

1. feladatsor megoldása



I. rész

1. Döntse el, hogy a következő állítások közül melyik igaz és melyik hamis!

- Ha két egész szám összege páratlan, akkor a szorzatuk páros.
- Ha egy egész szám osztható 4-gyel és 6-tal is, akkor osztható 24-gyel is.

Megoldás:

- Igaz, mert két egész szám összege csak akkor lehet páratlan, ha az egyik páratlan, a másik pedig páros. *1 pont*
- Hamis, mert például a 12 osztható 4-gyel és 6-tal is, de nem osztható 24-gyel. *1 pont*

2. Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 2 : 5. Mekkora a háromszög hegyesszögei?

Megoldás:

$$a : b = 2 : 5 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{2}{5}, \text{ amiből } \alpha \approx 21,8^\circ \quad 1 \text{ pont}$$

$$\text{és } \beta \approx 90^\circ - 21,8^\circ = 68,2^\circ \quad 1 \text{ pont}$$

3. Határozza meg a $[-3; 5[$ intervallumon értelmezett $f(x) = 4 - |x|$ függvény értékkészletét!

Megoldás:

$$-3 \leq x < 5 \Rightarrow 0 \leq |x| < 5 \Rightarrow -4 \leq |x| - 4 < 1 \Rightarrow -1 < 4 - |x| \leq 4 \quad 2 \text{ pont}$$

így az értékkészlet: $] -1; 4]$ *1 pont*

4. Mivel egyenlő $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ha $x + \frac{1}{x} = 5$?

Megoldás:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 = 5^2 - 2 = 23 \quad 3 \text{ pont}$$

5. Hány számjegyű a $(10^4)^7 + (10^5)^6$ tízes számrendszerbeli alakja?

Megoldás:

$$(10^4)^7 + (10^5)^6 = 10^{28} + 10^{30} = 10^{30} \cdot (10^{-2} + 1) = 1,01 \cdot 10^{30}$$

2 pont

A szám 31 jegyű.

1 pont

6. Egy négyszög minden oldala 25 cm, és az egyik átlója 30 cm. Mekkora a négyszög területe?

Megoldás:

A négyszög egy rombusz, amelynek területe $T = \frac{e \cdot f}{2}$.

1 pont

A másik átló kiszámolható a Pitagorasz-tétel alkalmazásával:

$$15^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = 25^2, \text{ amiből } f = 40.$$

2 pont

$$\text{A négyszög területe } T = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

1 pont

7. Egy 40 fős társaság 60%-a fiú. Hány lánynak kell érkeznie még, hogy a társaság 60%-a legyen lány?

Megoldás:

A társaságban $40 \cdot 0,6 = 24$ fiú van, és 16 lány.

1 pont

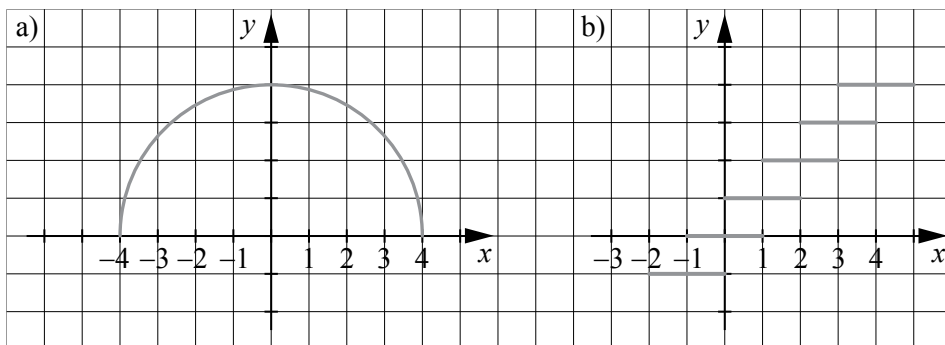
A lányok érkezésével a fiúk száma nem változik. Az új társaságnak 40%-a fiú.

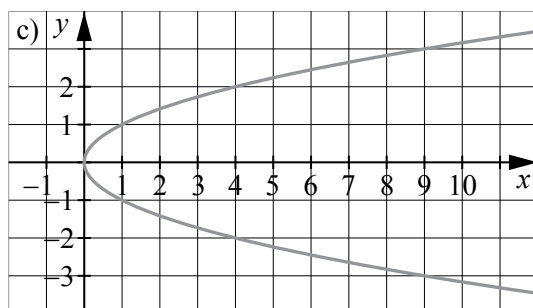
1 pont

$$\text{Így } \frac{24}{0,4} = 60 \text{ fős a társaság, azaz 20 lánynak kell érkezni.}$$

1 pont

8. Az alábbiak közül melyik lehet egy függvény grafikonja?





Megoldás:

A c) és a b) ábrán egy x értékhez több y érték is tartozik, ezért nem függvények grafikonjai.

Csak az a) ábra lehet egy függvény képe.

2 pont

9. Az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ halmaznak hány olyan eleme van, mely relatív prím 2010-hez?

Megoldás:

Mivel $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, így a 2010 valódi osztói az adott halmazból a 2; 3; 5; 6; 10.

1 pont

Az A halmazból a 4-nek, a 8-nak és a 9-nek van ezeken kívül közös osztója a 2010-zel.

Így a relatív prímek az 1; és a 7, azaz 2 darab 2010-hez relatív prím van az elemek között.

2 pont

10. Ábrázolja számegyenesen a $\sqrt{x+2} < 2$ egyenlőtlenséget teljesítő valós számokat!

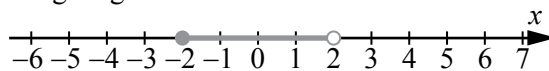
Megoldás:

A $\sqrt{x+2}$ kifejezés csak $x \geq -2$ számokra értelmezhető.

Négyzetre emelés után $x+2 < 4$, amiből $x < 2$.

2 pont

Az egyenlőtlenség megoldása:



1 pont

11. Ha 2 favágó 1 nap alatt 10 m^3 fát vág ki, akkor hány favágó vág ki 4 nap alatt 100 m^3 fát?

Megoldás:

A munkaidő és a kivágott fa mennyisége között egyenes arányosság van, így 2 favágó 10 nap alatt 100 m^3 fát vág ki.

1 pont

A munkások száma és a munkaidő között pedig fordított arányosság van, így 4 nap alatt 100 m^3 fát 5 favágó vág ki.

1 pont



II./A rész

12. Hét egymást követő egész szám közül az első 4 négyzetének összege egyenlő a következő 3 négyzetének összegével. Melyek ezek a számok?

Megoldás:

Jelöljük a középső számot x -szel, ekkor a 7 egymást követő szám:

$x-3; x-2; x-1; x; x+1; x+2; x+3$, ahol $x \in \mathbb{Z}$.

2 pont

$$(x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2$$

2 pont

$$4x^2 - 12x + 14 = 3x^2 + 12x + 14$$

2 pont

$$x^2 - 24x = 0 \Rightarrow x(x-24) = 0.$$

2 pont

Ennek $x=0$ és $x=24$ a két megoldása.

2 pont

Ha $x=0$, akkor a hét egész szám a: $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$.

1 pont

Ha $x=24$, akkor a keresett számok a: $21; 22; 23; 24; 25; 26; 27$.

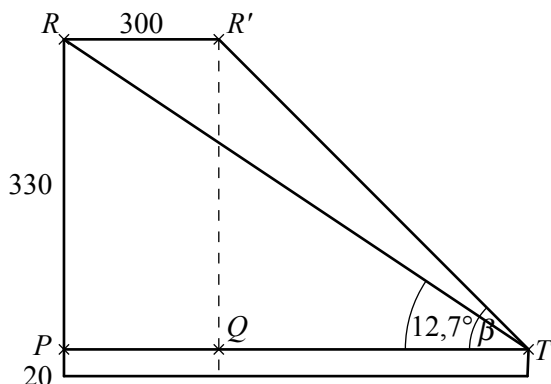
1 pont

13. Az irányítótorny 20 magasan levő ablakából a 350 m magasságban közeledő vitorlázó repülőt $12,7^\circ$ -os emelkedési szögben látjuk. Állandó magasságban repülve a gép 300 m-t tett meg a torony felé. Mekkora emelkedési szögben látjuk most a gépet?

Megoldás:

Készítsünk ábrát!

3 pont



Az RPT derékszögű háromszögben $RP=330$ és $\operatorname{tg} 12,7^\circ = \frac{330}{PT}$,

2 pont

amiből $PT = \frac{330}{\operatorname{tg} 12,7^\circ} \approx 1464,3$.

2 pont

$$QT = PT - 300 = 1164,3.$$

1 pont

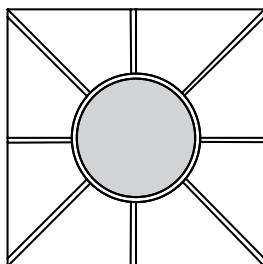
$R'QT$ derékszögű háromszögből β számolható. $\operatorname{tg} \beta = \frac{330}{1164,3}$, amiből $\beta \approx 15,8^\circ$.

3 pont

$15,8^\circ$ -os emelkedési szögben látjuk most a gépet.

1 pont

14. Egy négyzet alakú park közepén kör alakú kis tó található. A tó területe fele a körülötte levő füves rész területének.



- a) Mekkora a tó átmérője, ha a park oldalai 60 m hosszúak?
 b) Az ábrán látható módon sétányokat készítenek a parkban. Hány méter a teljes úthálózat hossza? (A tó körül is vezet út.)

Megoldás:

- a) Legyen r a tó sugara, t a területe! A park területe 3600 m^2 .

$$t = \frac{1}{2}(3600 - t), \text{ amiből } t = 1200 \text{ (m}^2\text{).}$$

3 pont

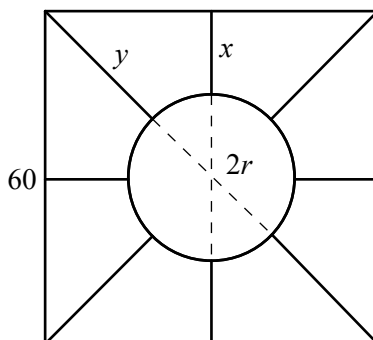
$$r^2\pi = 1200 \text{ összefüggésből } r \approx 19,5.$$

1 pont

A tó átmérője 39 m.

1 pont

- b) Az oldalfelező pontokból induló utak hossza legyen x , a csúcsokból indulóké pedig y !



$$2x + 2r = 60, \text{ amiből } x = 30 - r \approx 10,5.$$

2 pont

$$2y + 2r = 60\sqrt{2}, \text{ amiből } y = 30\sqrt{2} - r \approx 22,9.$$

3 pont

A teljes úthálózat hossza

$$2r\pi + 4x + 4y \approx 256,1 \text{ m.}$$

2 pont



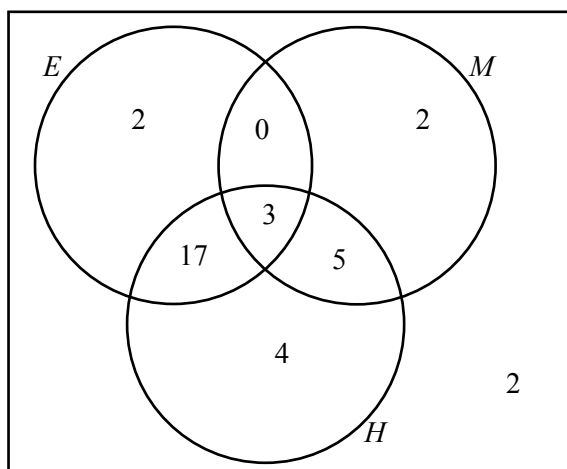
II./B rész

- 15.** Egy 35 fős osztály 3 feladatból álló dolgozatot írt matematikából. A javítás után a következőket állapította meg a tanár: az első és a harmadik feladatot 20-an, a második és a harmadik feladatot 8-an tudták megoldani. Csak az első, illetve csak a második feladat 2-2 tanulónak lett jó. Az első vagy második példát 29-en oldották meg jól. Ugyanennyien voltak, akiknek sikerült a harmadik feladat megoldása. Hibátlan dolgozat mindössze 3 darab volt.

- Hány tanuló van, aki pontosan 2 feladatot oldott meg jól?
- Hányan nem tudtak egyetlen feladatot sem megoldani?
- A diákok hány százaléka oldott meg legfeljebb egy példát jól?

Megoldás:

- Legyen E , M , H az első, második, illetve a harmadik feladatot megoldó tanulók halmaza! Ábrázoljuk Venn-diagramon a halmazok elemszámát! 6 pont
Pontosan két feladatot $17 + 5 + 0 = 22$ fő oldott meg. 2 pont



- $|E \cup M \cup H| = 33$, azaz 33-an oldottak meg legalább egy feladatot. 2 pont
Így 2 tanuló nem tudott egyetlen feladatot sem megoldani. 2 pont
- Pontosan 1 feladatot $2 + 2 + 4 = 8$ fő oldott meg. 1 pont
Egyetlen példát sem tudott megoldani 2 fő. 1 pont
A legfeljebb 1 feladatot megoldók száma így 10. 1 pont
 $\frac{10}{35} \approx 0,2857$, azaz a diákok 28,57%-a oldott meg legfeljebb 1 feladatot. 2 pont

- 16.** Egy egyenlő szárú háromszög szára 20 cm, az alaphoz tartozó magassága 16 cm.

- Mekkora a szárhoz tartozó magasság?
- Számítsa ki a háromszög köré írható kör sugarát!
- Egy hozzá hasonló háromszög területe 44%-kal nagyobb. Mekkora ez utóbbi háromszög köré írható kör sugara?

Megoldás:

- Az alap hossza Pitagorasz-tétellel meghatározható.

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 16^2 = 20^2, \text{ amiből } a = 24 \text{ cm.}$$

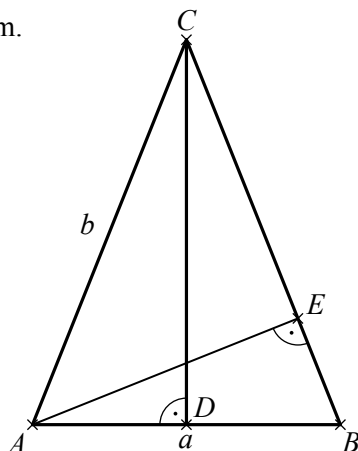
2 pont

A háromszög területéből $a \cdot m_a = b \cdot m_b$

2 pont

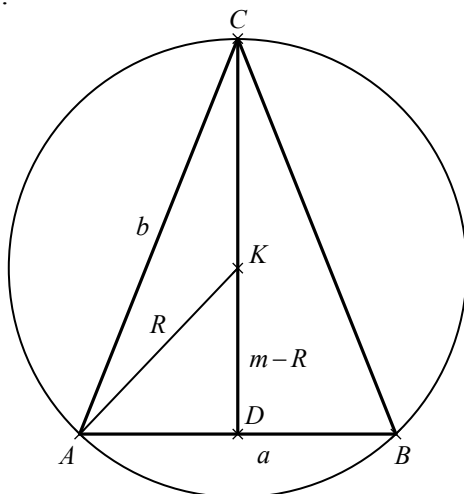
$$m_b = \frac{24 \cdot 16}{20} = 19,2 \text{ cm.}$$

1 pont



- A rajz elkészítése:

1 pont



A háromszög köré írható körének sugara legyen R ! Ennek a körnek a középpontja (K) az alaphoz tartozó magasságra illeszkedik, és $m - R$ távolságra van az alap felező-pontjától (D). Az ADK derékszögű háromszögben írjuk fel a Pitagorasz-tételt! 2 pont

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (m - R)^2 = R^2 \quad 1 \text{ pont}$$

$$12^2 + 16^2 - 32R + R^2 = R^2, \text{ amiből } R = 12,5 \text{ cm.} \quad 2 \text{ pont}$$

- c) Legyen a hozzá hasonló háromszög területe T' , a hasonlóság aránya λ !

$$T' = 1,44 \cdot T, \text{ és } \frac{T'}{T} = \lambda^2 \quad 2 \text{ pont}$$

$$\text{Ezekből } \lambda = 1,2. \quad 2 \text{ pont}$$

A hozzá hasonló háromszög köré írható körének sugara:

$$R' = \lambda \cdot R = 1,2 \cdot 12,5 = 15 \text{ cm.} \quad 2 \text{ pont}$$

- 17.** Két egymásra merőleges úton a kereszteződés felé halad egy-egy autó $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, illetve $18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel. A gyorsabb autó 1480 m távolságra van a kereszteződéstől, amikor a lassabb 1260 m-re.

- Mennyi idő múlva lesz a gyorsabb autó kétszer olyan messze a kereszteződéstől, mint a lassabb?
- Milyen távol van egymástól a két autó, amikor a lassabb 360 m-re van a kereszteződéstől?
- Adja meg a két autó egymástól való távolságát az idő függvényében addig, amíg az első autó eléri a kereszteződést!

Megoldás:

- a) A gyorsabb jármű t másodperc múlva méterben mérve $1480 - 20t$ távolságra, a lassabb pedig $1260 - 18t$ távolságra lesz a kereszteződéstől. 2 pont

$$1480 - 20t = 2(1260 - 18t) \quad 2 \text{ pont}$$

$$t = 65 \text{ s}$$

Behelyettesítve: 65 s múlva a gyorsabb 180 m-re, a lassabb pedig 90 m-re lesz a kereszteződéstől. 2 pont

- b) Jelöljük t_2 -vel azt az időt, amíg a lassabb autó 900 m-t tesz meg!

$$18 \cdot t_2 = 900, \text{ ahonnan } t_2 = 50 \text{ s.} \quad 2 \text{ pont}$$

Ezalatt a másik autó 1000 m-t tesz meg, így 480 m-re lesz a kereszteződéstől. 2 pont

$$\text{A távolságuk: } d = \sqrt{360^2 + 480^2} = 600 \text{ (m).} \quad 2 \text{ pont}$$

- c) A gyorsabb autó 74 s, a lassabb 70 s alatt éri el a kereszteződést. 1 pont

A köztük lévő távolság az idő függvényében:

$$d(t) = \sqrt{(1480 - 20t)^2 + (1260 - 18t)^2} = \sqrt{724t^2 - 104560t + 3778000} \text{ (m),} \quad 3 \text{ pont}$$

$$\text{ahol } 0 \leq t \leq 74. \quad 1 \text{ pont}$$