

2. Írjuk fel gyökjel nélkül a $\sqrt{\frac{49x^2 - 14x + 1}{25}}$ kifejezést, és adjuk meg az értelmezési tartományát! (6 pont)

3. Határozzuk meg azt az x valós számot, amelyre igaz, hogy $\sqrt{4x-1} = 2$! (6 pont)

4. Határozzuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{\frac{x-8}{3x+4}}$

b) $\frac{\sqrt{x-8}}{\sqrt{3x+4}}$

(6 pont)

1.4. A négyzetgyök fogalma



⌚ 10'

1. Adjuk meg a $\sqrt{\frac{169}{49}} \cdot \sqrt{625} + 2\sqrt{\frac{100}{49}} - 5\frac{\sqrt{256}}{7}$ kifejezés pontos értékét! (4 pont)

2. Határozzuk meg a $\sqrt{-y^2 + 8y - 16}$ kifejezés értelmezési tartományát! (6 pont)

3. Mely x valós számokra igaz, hogy...

a) $\sqrt{x^2 - 18x + 81} = x - 9$; b) $\sqrt{4x^2 + 7} = -3$! (6 pont)

4. Határozzuk meg a $\sqrt{\frac{3-x}{x-5}} \cdot \sqrt{x-4}$ kifejezés értelmezési tartományát! (6 pont)

2.1. A négyzetgyökvonás azonosságai



⌚ 10'

1. Számoljuk ki a $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{8}{27}}$ pontos értékét! (4 pont)

2. Adjuk meg a $\sqrt{\frac{36}{625}}$ és a $\sqrt{2^4}$ pontos értékét! (4 pont)

3. Mely valós x -ekre azonosság a $\sqrt{x^2 - 25} = \sqrt{x-5} \cdot \sqrt{x+5}$ egyenlőség? (4 pont)

4. Mely valós x -ekre igaz, hogy $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 - x$? (5 pont)

2.2. A négyzetgyökvonás azonosságai

⌚ 10'

1. Adjuk meg a $\sqrt{\frac{16}{81}}$ és a $\sqrt{121 \cdot 25}$ pontos értékét! (4 pont)
2. Adjuk meg a $\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{\frac{54}{125}}$ és a $\sqrt{13^4}$ pontos értékét! (4 pont)
3. Végezzük el a kijelölt műveleteket: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - 2 \cdot \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$ (6 pont)
4. Mely x valós számok esetén azonosság a $\frac{\sqrt{x^2 - 49}}{\sqrt{x - 7}} = \sqrt{x + 7}$ egyenlet? (6 pont)

2.3. A négyzetgyökvonás azonosságai

⌚ 10'

1. Adjuk meg a $\sqrt{\frac{6}{7}} : \sqrt{\frac{726}{28}}$ és a $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$ pontos értékét! (4 pont)
2. Végezzük el a kijelölt műveleteket: $-\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{8}{15}} \cdot \sqrt{\frac{135}{2}} + 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$ (4 pont)
3. Végezzük el a kijelölt műveleteket: $\frac{4}{5} \cdot \sqrt{5^4} - 3 \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^6} + 4 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ (6 pont)
4. Mely x valós számok esetén azonosság a $\sqrt{\left(x^2 + 7x + \frac{49}{4}\right)^2} = x^2 + 7x + \frac{49}{4}$? (6 pont)

2.4. A négyzetgyökvonás azonosságai

⌚ 10'

1. Adjuk meg a $\sqrt{\frac{11}{125}} : \sqrt{\frac{5}{44}}$ és a $\sqrt{2} \cdot \sqrt{99} \cdot \sqrt{22}$ pontos értékét! (5 pont)

2. Végezzük el a kijelölt műveleteket: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{49}{2}} - \sqrt{13} \cdot \sqrt{52} + 8 \cdot \frac{\sqrt{14}}{3} \cdot \sqrt{\frac{9}{56}}$!

6 pont

3. Végezzük el a kijelölt műveleteket: $\sqrt{17^2} \cdot \sqrt{\frac{25}{289}} - 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2} - \sqrt{3^6}$!

6 pont

4. Mely x valós számok esetén azonosság a $\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}{x - 4} = 1$ egyenlet? 6 pont

3. 1. A négyzetgyökjel alól kivitel vagy alá bevitel



⌚ 10'

1. Vigyük ki a négyzetgyökjel alól!

a) $\sqrt{363}$; b) $\sqrt{\frac{18}{245}}$

4 pont

2. Vigyük be a négyzetgyökjel alá!

a) $4\sqrt{5}$; b) $-5\sqrt{2}$

4 pont

3. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

$(\sqrt{32} - \sqrt{98} + \sqrt{338})(\sqrt{18} - \sqrt{8} + \sqrt{162})$

7 pont

4. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

$(\sqrt{27} - \sqrt{128} + \sqrt{75} - \sqrt{32})(\sqrt{12} + \sqrt{108} + \sqrt{200} + \sqrt{8})$

9 pont

3. 2. A négyzetgyökjel alól kivitel vagy alá bevitel



⌚ 10'

1. Vigyük ki a négyzetgyökjel alól!

a) $3\sqrt{75}$; b) $-4\sqrt{294}$

4 pont

2. Vigyük be a négyzetgyökjel alá!

a) $-9\sqrt{7}$; b) $11\sqrt{5}$

4 pont

3. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

$$\sqrt{\sqrt{300} - 2\sqrt{59}} \cdot \sqrt{10\sqrt{3} + \sqrt{236}}$$

6 pont

4. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

$$(\sqrt{45} - \sqrt{180} + \sqrt{500} - \sqrt{80} - \sqrt{72})(\sqrt{125} - \sqrt{20} + \sqrt{32} + \sqrt{8})$$

9 pont

3.3. A négyzetgyökjel alól kivitel vagy alá bevitel



10'

Végezzük el a kijelölt műveleteket! Pontos értékekkel dolgozzunk!

1. $\sqrt{\sqrt{125} - 3\sqrt{11}} \cdot \sqrt{\sqrt{99} + 5\sqrt{5}}$

6 pont

2. $(\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{112} - \sqrt{20})(\sqrt{63} + \sqrt{80} - 2\sqrt{5})$

8 pont

3. $\left(\frac{1}{3}\sqrt{27} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} + 3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)(\sqrt{48} - \sqrt{12} - \sqrt{18} + \sqrt{8})$

8 pont

4. $\left(7\sqrt{a^3} - 3a\sqrt{25a} - \frac{1}{7}\sqrt{49a^3}\right)\left(2\sqrt{16a} - \frac{2}{9}\sqrt{81a}\right); a \in \mathbb{R}_0^+$

9 pont

3.4. A négyzetgyökjel alól kivitel vagy alá bevitel



15'

Végezzük el a kijelölt műveleteket! Pontos értékekkel dolgozzunk!

1. $(\sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{45} - \sqrt{20} + \sqrt{405})(\sqrt{112} - 3\sqrt{7} + 3\sqrt{5} + \sqrt{245})$

8 pont

2. $\left(\frac{1}{5}\sqrt{50} - 4\sqrt{32} + \frac{\sqrt{800}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{72} - 4\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{450}\right)$

8 pont

3. $(5\sqrt{75} - 3\sqrt{12} - 4\sqrt{27} - 3\sqrt{2})(12\sqrt{8} - 7\sqrt{18} + \sqrt{147})$

9 pont

4. $\left(3\sqrt{25a^5} - 2\sqrt{49a^5} + \frac{2}{5}\sqrt{225a^5}\right)\left(\frac{1}{3}\sqrt{9a} + 4\sqrt{169a}\right); a \in \mathbb{R}_0^+$

9 pont

1.1. A négyzetgyök fogalma

⌚ 10'

1. Ilyen valós szám nem létezik, mert egy nemnegatív valós szám négyzetgyöke is nemnegatív értéket vehet fel.

2. a) $x \in \mathbb{R}$; b) $\frac{5-3x}{x+1} \geq 0, x \in \left]-1; \frac{5}{3}\right]$.

3. $2x-5 \geq 0$, és $7-x \geq 0$, innen $x \in \left[\frac{5}{2}; 7\right]$.

4. $\sqrt{(x-7)^2} + 2\sqrt{(8x+1)^2} = |x-7| + 2|8x+1|$.

1.2. A négyzetgyök fogalma

⌚ 10'

1. 11; $\frac{15}{14}$; $10 + 4 \cdot 12 = 58$.

2. $\sqrt{(x+3)^2} - 7\sqrt{(3x-5)^2} = |x+3| - 7|3x-5|$, az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$.

3. $\sqrt{\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}} = \sqrt{x+5}, x \in [-5; \infty[\setminus \{5\}$.

4. a) $\frac{7x-3}{4-5x} \geq 0$, innen $x \in \left[\frac{3}{7}; \frac{4}{5}\right[$;

b) $7x-3 \geq 0$, és $-5x > 0$, innen $x \in \left[\frac{3}{7}; \frac{4}{5}\right[$.

1.3. A négyzetgyök fogalma

⌚ 10'

1. $\frac{5}{7}$; 22; $10 \cdot 9 - 5 \cdot 4 = 70$.

2. $\sqrt{\left(\frac{7x-1}{5}\right)^2} = \left|\frac{7x-1}{5}\right|; x \in \mathbb{R}$.



3. A négyzetgyök definíciója alapján: $x \geq \frac{1}{4}$ és $4x - 1 = 4$, $x = \frac{5}{4}$.
4. a) $\frac{x-8}{3x+4} \geq 0$, innen $x \in]-\infty; -\frac{4}{3}[\cup [8; \infty[$;
 b) $x - 8 \geq 0$ és $3x + 4 > 0$, innen $x \in [8; \infty[$.

1.4. A négyzetgyök fogalma



10'

1. $\frac{13}{7} \cdot 25 + 2 \cdot \frac{10}{7} - 5 \cdot \frac{16}{7} = \frac{265}{7}$.
2. $-(y-4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y-4)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 4$. Az értelmezési tartomány $\{4\}$.
3. a) $x \geq 9$; b) Nincs ilyen valós szám.
4. $\frac{3-x}{x-5} \geq 0$ és $x - 4 \geq 0$, innen $x \in [4; 5[$.

2.1. A négyzetgyökvonás azonosságai



10'

1. $\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$.
2. $\frac{6}{25}; 4$.
3. Megvizsgáljuk a két oldal értelmezési tartományát, és a két számhalmaz metszete a megoldás. $x^2 - 25 \geq 0$ és $x - 5 \geq 0$ és $x + 5 \geq 0$. A közös rész: $x \in [5; \infty[$.
4. $|x-2| = 2-x \Leftrightarrow x-2 \leq 0; x \in]-\infty; 2]$.

2.2. A négyzetgyökvonás azonosságai



10'

1. $\frac{4}{9}; 11 \cdot 5 = 55$.



$$2. \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}; 169.$$

$$3. \sqrt{36} + 3 \cdot \sqrt{16} - 2 \cdot \sqrt{16} = 10.$$

4. Megvizsgáljuk a két oldal értelmezési tartományát, és a két számhalmaz metszete a megoldás.

$$x^2 - 49 \geq 0 \text{ és } x - 7 > 0 \text{ és } x + 7 \geq 0. \text{ A közös rész: } x \in]7; \infty[.$$

2.3. A négyzetgyökvonás azonosságai



⌚ 10'

$$1. \sqrt{\frac{6}{7} \cdot \frac{28}{726}} = \frac{2}{11}; 15.$$

$$2. -\frac{3}{2} \cdot 6 + 2 \cdot 20 = -9 + 40 = 31.$$

$$3. \frac{4}{5} \cdot 25 - 3 \cdot \frac{8}{27} + 4 \cdot 10 = 20 - \frac{8}{9} + 40 = \frac{532}{9}.$$

4. Mivel $\left| x^2 + 7x + \frac{49}{4} \right| = \left| \left(x + \frac{7}{2} \right)^2 \right| = \left(x + \frac{7}{2} \right)^2 = x^2 + 7x + \frac{49}{4}$, ezért minden valós x esetén azonosság.

2.4. A négyzetgyökvonás azonosságai



⌚ 10'

$$1. \sqrt{\frac{121 \cdot 4}{625}} = \frac{22}{25}, \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 121} = 66.$$

$$2. \sqrt{49} - \sqrt{4 \cdot 169} + 8 \cdot \sqrt{\frac{14}{56}} = 7 - 26 + 4 = -15.$$

$$3. 17 \cdot \frac{5}{17} - 2 \cdot \frac{5}{2} - 3^3 = 5 - 5 - 27 = -27.$$

$$4. \frac{|x-4|}{x-4} = 1 \text{ pontosan akkor azonosság, ha } x > 4.$$



Előszó	5
NÉGYZETGYÖK	7
1.1. A négyzetgyök fogalma	7
2.1. A négyzetgyökvonás azonosságai.....	8
3.1. A négyzetgyökjel alól kivitel vagy alá bevitel	10
4.1. Tört nevezőjének gyöktelenítése	12
5.1. Négyzetgyök	13
MÁSODFOKÚ EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK, EGYENLETRENDSZEREK	16
6.1. Másodfokú függvények (ismétlés)	16
7.1. Másodfokú egyenletek grafikus megoldása	17
8.1. Másodfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása	18
9.1. Teljes négyzetté alakítás (ismétlés)	19
10.1. Másodfokú egyenletek megoldása megoldóképlettel	20
11.1. Másodfokú egyenletre vezető törtes egyenletek I.	22
12.1. Másodfokú egyenletre vezető törtes egyenletek II.	23
13.1. Másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatok I.	25
14.1. Másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatok II.	27
15.1. Másodfokú egyenletek megoldása	29
16.1. Gyöktényezős alak	31
17.1. Viète-formulák.....	32
18.1. Gyöktényezős alak, Viète-formulák.....	33
19.1. Másodfokúra visszavezethető egyenletek I.	35
20.1. Másodfokúra visszavezethető egyenletek II.	36
21.1. Másodfokú egyenlőtlenségek I.	38
22.1. Másodfokú egyenlőtlenségek II.	39
23.1. Négyzetgyökös egyenletek I.	41
24.1. Négyzetgyökös egyenletek II.	42
25.1. Számítási és mértani közép.....	43
26.1. Szélsőérték problémák I.	45
27.1. Szélsőérték problémák II.	46
28.1. Másodfokú egyenletrendszerek I.	47
29.1. Másodfokú egyenletrendszerek II.	49
30.1. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek	51
HASONLÓSÁG ÉS ALKALMAZÁSAI.....	53
31.1. Tételek kölcsönös helyzete.....	53
32.1. Központos hasonlóság	55
33.1. Hasonló pontthalmazok.....	56
34.1. A háromszögek hasonlósági kritériumai.....	57
35.1. Hasonlósággal megoldható feladatok I.	58

36.1. Hasonlósággal megoldható feladatok II.	59
37.1. Magasságtétel	60
38.1. Befogótétel	62
39.1. Szögfelezőtétel	63
40.1. A hasonlóság alkalmazásai	64
41.1. Hasonló síkidomok kerülete, területe	65
42.1. Hasonló testek felszíne, térfogata	67
43.1. Hasonlóság	68
44.1. Kerületi és középponti szögek	69
45.1. Látókörívek	71
46.1. Húrnégyszögek I.	72
47.1. Húrnégyszögek II.	74
48.1. Kerületi és középponti szögek, húrnégyszögek	75
 ELSŐ FÉLÉVI ÖSSZEFOGLALÁS	 78
49.1. Négyzetgyök, másodfokú egyenletek, hasonlóság	78
 TRIGONOMETRIA	 81
50.1. Hegyesszögek szögfüggvényei I.	81
51.1. Hegyesszögek megadása szögfüggvény alapján	83
52.1. Nevezetes szögek szögfüggvényei	84
53.1. Hegyesszögek szögfüggvényei II.	85
54.1. Trigonometrikus egyenletek hegyesszögekkel	86
55.1. Derékszögű háromszögek	88
56.1. Hegyesszögek szögfüggvényei III.	89
57.1. Síkgeometriai számítások I.	91
58.1. Síkgeometriai számítások II.	92
59.1. Térgeometriai számítások I.	94
60.1. Térgeometriai számítások II.	96
61.1. Hegyesszögek trigonometriája	98
 GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK, KOMBINATORIKA, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS	 101
62.1. Skatulyaelv	101
63.1. Gráfelméleti fogalmak I.	103
64.1. Gráfelméleti fogalmak II.	104
65.1. Skatulyaelv, gráfok	106
66.1. Szorzási szabály alkalmazása	108
67.1. Összeadási szabály alkalmazása I.	110
68.1. Összeadási szabály alkalmazása II.	111
69.1. Összeszámlálási feladatok	112
70.1. Permutációk	114
71.1. Variációk	116

72.1. Kombinációk	117
73.1. Vegyes kombinatorikai problémák I.	118
74.1. Vegyes kombinatorikai problémák II.	120
75.1. Kombinatorika.....	122
76.1. Véletlen jelenségek.....	124
77.1. Kijelentések – ítéletek	126
78.1. Logikai műveletek	128
79.1. Matematikai logika	130
80.1. Problémamegoldás gráfok segítségével	132
 MÁSODIK FÉLÉVI ÖSSZEFOGLALÁS	 135
81.1. Hasonlóság, trigonometria, kombinatorika, logika	135
 ÉV VÉGI ÖSSZEFOGLALÁS.....	 138
82.1. A 10. osztályos tananyag.....	138