

ÉRETTSÉGI FELADATGYŰJTEMÉNY matematikából

> MEGOLDÁSOK



9-10. évfolyam

Kedves Olvasó!

Mellékletünk a kötetben szereplő összes feladat eredményét tartalmazza. A feladatok többségéhez megadtunk legalább egy lehetséges megoldási utat. A pdf-olvasóprogramok által kínált alkalmazási lehetőségek (pl. lapozás, kereshetőség stb.) mellett az ellenőrizni kívánt témakör megoldásait gyorsabban is elérheti, ha a tartalomjegyzékben a témakör címére kattint. Ekkor azonnal arra az oldalra ugorhat, amelyiken a választott témakör feladatainak megoldásai kezdődnek. A tartalomjegyzékhez a lap alján található ikonra kattintva juthat vissza legegyszerűbben.

Eredményes böngészést kívánunk.

A Szerzők és a Kiadó



TARTALOMJEGYZÉK

1. Ismétlés	3
1.1. Műveletek racionális számokkal	3
1.2. A százalékszámításról	3
2. Halmazelmélet	6
2.1. Bevezetés a halmazelméletbe	6
3. Algebra	18
3.1. Hatványozás egész kitevővel	18
3.2. Betűs kifejezések	21
3.3. Algebrai tört kifejezések	31
3.4. Négyzetgyökvonás	35
4. Számelmélet	41
4.1. Bevezetés a számelméletbe	41
4.2. Számrendszerek	50
5. Függvények	53
5.1. Bevezetés a függvénytanba	53
5.2. A függvények ábrázolása, jellemzése	58
6. Egyenletek	86
6.1. Egyenletek grafikus megoldása	86
6.2. Az egyenletekről	93
6.3. Törtes egyenletek	95
6.4. Szöveges feladatok	96
6.5. Másodfokú egyenletek	103
6.6. Négyzetgyökös egyenletek	114
6.7. Abszolút értékű egyenletek	115
6.8. Az egyenlőtlenségekről	116
6.9. Az ekvivalens (egyenértékű) átalakításokról	119
6.10. Egyenletrendszerek	123
7. Geometria	130
7.1. A háromszög szögeire, oldalaira vonatkozó tételek	130
7.2. A háromszög nevezetes vonalai és pontjai	133
7.3. A háromszög területszámítási módjai	138
7.4. A speciális négyszögek fajtái	142
7.5. Konvex sokszögek	146
7.6. A kör és részei	147
7.7. Látószög	153
7.8. Húrnégyszögek, érintőnégyszögek	154
7.9. Geometriai transzformációk	156
7.10. Hasonlóság	160
7.11. Vektorok	170
7.12. Trigonometria	172
8. Gondolkodási módszerek	182
8.1. Skatulyaelv, logika	182
9. Kombinatorika	188
9.1. Kombinatorikai problémák	188
10. Gráfok	202
10.1. Gráfelmélet	202
11. Statisztika, valószínűségszámítás	212
11.1. Statisztika	212
11.2. Valószínűségszámítás	225

1. Ismétlés – megoldások

1.1. Műveletek racionális számokkal

1. a) $-\frac{6}{5} < -\frac{1}{5} < -0,1 < 0 < \frac{8}{11} < 0,75 < \frac{7}{8} < \frac{8}{7} < 1,3$;

b) $-5^2 < (-1)^3 < 2^3 < 3^2 < |-11| < (-4)^2$.

2. a) 3; b) 2; c) $-\frac{1}{64}$; d) 1; e) $-\frac{19}{40}$; f) 1; g) 3; h) -1; i) $-\frac{4}{3}$; j) $\frac{13}{7}$;

k) $-\frac{1}{90}$.

3. a) $-\frac{1}{20}$; b) $\frac{1}{10}$; c) $\frac{3}{40}$; d) $-\frac{21}{100}$.

Növekvő sorrendben: d), a), c), b).

4. a) $-\frac{2}{5}$; b) $\frac{81}{16}$; c) $\frac{5}{4}$; d) $\frac{3}{10}$; e) $\frac{3}{20}$; f) $\frac{10}{11}$.

5. a) $1000 \cdot 15 - 3 \cdot 15 + 3 \cdot 15 = 15\,000$;

b) $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 14}{7 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 6} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7}{7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} = 1$;

c) $(1+99) + (3+97) + \dots + (49+51) = 25 \cdot 100 = 2500$;

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2006}{2007} = \frac{1}{2007}$;

e) $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2008}{2007} = \frac{2008}{2} = 1004$;

f) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2006} - \frac{1}{2007}\right) = 1 - \frac{1}{2007} = \frac{2006}{2007}$.

1.2. A százalékszámításról

6. a) A bal oldali kifejezés $\frac{1}{36}$ -dal;

b) a bal oldali kifejezés $\frac{2}{45}$ -del;



1. ISMÉTLÉS – MEGOLDÁSOK

- c) a bal oldali kifejezés $\frac{3}{25}$ -del;
d) a jobb oldali kifejezés $\frac{7}{100}$ -dal.
7. a) A bal oldali kifejezés a nagyobb;
b) a bal oldali kifejezés a nagyobb;
c) a jobb oldali kifejezés a nagyobb.
8. a) 86 400; b) 7,5; c) 2000; d) 87,5; e) 100; f) 0,25; g) 230; h) 6.
9. 11,9 km van még hátra.
10. 8 db ruhát tudna készíteni. 756,25 m² anyag kellene.
11. 1 km hosszú sor alakul ki.
12. 2893 számjegyet kellett leírni. 300-szor fordul elő az 5-ös.
13. a) $\frac{10}{7}$ km-t. b) 5,7%-a.
14. a) 40%, illetve 150%;
b) 30%, illetve 100%;
c) 25%;
d) 240%, illetve 0,2%;
e) 250%, illetve 125%.
15. 1560 Ft-ért.
16. a) 250%-a. b) Annának 100, Beának 250 forintja van.
17. 75 000 Ft. b) 187,5%-a.
18. 60 dkg rizs, 7,5 dl víz, 1,5 l tej, 15 evőkanál cukor, 9 tojás, 9 dkg margarin és másfél citrom héja.



1. ISMÉTLÉS – MEGOLDÁSOK

19. A szorzat értéke 0.

20. A játék 2304 forintba kerül. Az új ár 72%-a az eredeti árnak.

21. A kabát 5000 forintba került eredetileg. Az új ár 92,4%-a az eredeti árnak.

22. A felét.

23. a) közelítőleg 66,67%-a. b) 200 g.

24. A gyermek tömege 18,26-szorosára nőtt.

25. a) $\frac{2}{5}$. b) 150%. c) $\frac{3}{10}$. d) 300%. e) 4000 Ft.

26. a) $\frac{4}{3}$. b) 25%. c) 1800 Ft-ot takarítunk meg. d) Közelítőleg 426,67 km.

27. 90 Ft.

28. 2080 db.

29. 2295 Ft.

30. 50%.

31. 48%.

	A	E
G	$0,2x$	
$\acute{E}$	$0,8x \cdot \frac{3}{5} = 0,48x$	$0,8x \cdot \frac{2}{5}$

x : a tárgyak száma



2. Halmazelmélet – megoldások

2.1. Bevezetés a halmazelméletbe

32. Halmazt határoz meg: a), e), f), h), és i).

33. a) $A = \{cs; dz; gy; ly; ny; sz; ty; zs\}$
b) $B = \{\text{kedd; csütörtök; péntek; szombat; vasárnap}\}$
c) $C = \{2; 3; 5; 7\}$
d) $D = \{0; 5\}$
e) $E = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$
f) $F = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$
g) $G = \{5; 7; 9; 11; 13\}$
h) $H = \{\}$

34. Egy lehetséges megadási mód:

$K = \{\text{a pozitív egész számok reciprokai}\}$

$M = \{\text{a 100-nál kisebb, 9-re végződő természetes számok}\}$

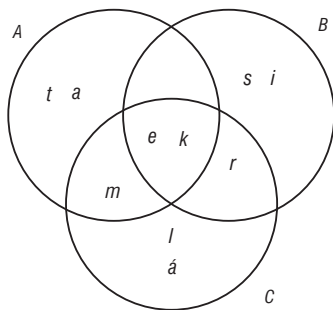
$N = \{\text{a kétjegyű négyzetszámok}\}$

$P = \{\text{a 200-nál kisebb, természetes szám kitevőjű 2 hatványok}\}$

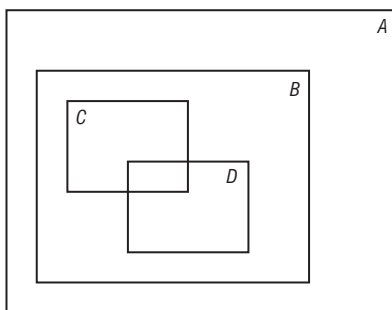
35. $A = E = G = H = J = \{2\}; \quad D = F = \emptyset.$

36. A Venn-diagram az a) esetben az elemek felsorolásával, a többi esetben csak halmazábrákkal:

a)

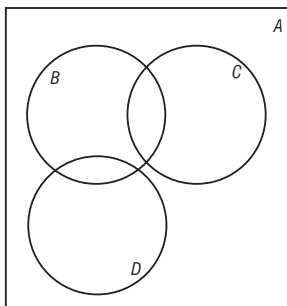


b)

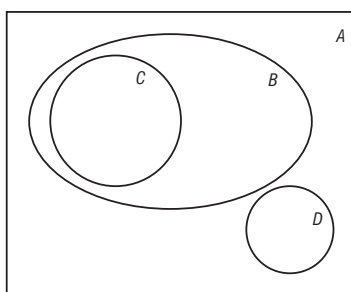


2. HALMAZELMÉLET – MEGOLDÁSOK

c)



d)



37. Igaz állítások: a); b); g); h); i).

38. $U = \{10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$

a) $\{11; 13; 15; 17; 19\}$; b) $\{16\}$; c) $\emptyset$; d) U ; e) $\{12; 20\}$.

39. a) $A \subset D$; $B \subset D$; $C \subset D$; $E \subset D$; $E \subset B$ és $E \subset A$

b) $D \subset C \subset B \subset A$ és $D \subset E$

c) $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{R}$

d) $K \subset H \subset M$ és $K \subset L \subset M$

40. A részhalmazokat növekvő elemszám szerint rendezve:

a) $\emptyset$; $\{a\}$

b) $\emptyset$; $\{a\}$; $\{b\}$; $\{a; b\}$

c) $\emptyset$; $\{x\}$; $\{y\}$; $\{z\}$; $\{x; y\}$; $\{x; z\}$; $\{y; z\}$; $\{x; y; z\}$

Az A halmaz minden részhalmaza egyben B -nek is részhalmaza, tehát két közös részhalmaza van A -nak és B -nek.

C halmaznak 4 db y -t nem tartalmazó részhalmaza van.

41. Az $A = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81\}$ halmaz részhalmazainak száma $2^9 = 512$.

42. A mérősúlyok egy 4 elemű halmazt alkotnak. Annyiféle tömeg mérhető velük, amennyi a halmaz üreshalmaztól különböző részhalmazainak száma.

a) 15 különböző tömeg mérhető.

b) Azok a tömegek nem mérhetők, amelyeket nem tudunk a halmaz elemeinek összegeként előállítani. Ezek a 4 g, 9 g és a 14 g.

43. Ha az üres vajaskenyeret is megengedjük, akkor 2^3 , azaz 8-féle lehetőség van.



2. HALMAZELMÉLET – MEGOLDÁSOK

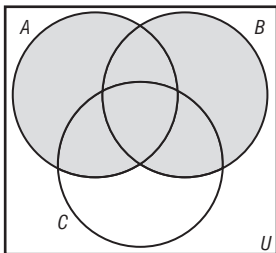
44. A golyókat egy n elemű halmaznak tekintve annyi lehetőség van a húzásra, amennyi a halmaz összes részhalmazának száma, azaz 2^n .
45. A 6 elemű halmazból az 1-et elhagyva egy 5 elemű halmazt kapunk, amely az eredeti halmaznak részhalmaza. Ennek 32 részhalmaza van, amelyek a 6 elemű halmaznak is részhalmazai és nem tartalmazzák az 1-et. Mivel összesen 64 részhalmaza van az eredeti halmaznak, így $64 - 32 = 32$ olyan részhalmaza van, amely tartalmazza az 1-et. A kétfajta részhalmazból tehát ugyanannyi van.
46. Az előző gondolatmenet alapján mindkettőből 2^{n-1} db van.
47. A részhalmazok párba állíthatók úgy, hogy minden párban a két részhalmaz metszete üres, uniójuk pedig az adott n elemű halmaz. Ha n páratlan, akkor minden párban az egyik részhalmaz elemszáma páros, a másiké pedig páratlan, így a kétfajta részhalmazból ugyanannyi van. Ha n páros, akkor egy elemet elvéve páratlan elemszámú halmazt kapunk. Ennek a halmaznak az előzőek szerint ugyanannyi páros és páratlan elemszámú részhalmaza van, amelyek egyben az eredeti halmaznak is részhalmazai. Az elvett elemet minden részhalmazhoz hozzávéve megkapjuk az összes hiányzó részhalmazát az eredeti halmaznak. Ezzel az egyesítéssel a páros elemszámú részhalmazból páratlan elemszámú lesz, és fordítva, páratlanból páros. Mivel ezek száma egyenlő volt, így az új részhalmazok között is egyenlő számú páros és páratlan elemszámú részhalmaz lesz.
48. A műveletek eredményei a következő halmazok:
- $A \cup B = \{a; b; d; e; f; g\}$, $A \cap B = \{b\}$, $A \setminus B = \{a; e\}$, $B \setminus A = \{d; f; g\}$,
 $\overline{A} = \{c; d; f; g\}$, $\overline{B} = \{a; c; e\}$.
 - $A \cup B = \{5\text{-tel, vagy } 6\text{-tal osztható természetes számok}\}$
 $A \cap B = \{30\text{-cal osztható természetes számok}\}$
 $A \setminus B = \{5\text{-tel osztható, de } 6\text{-tal nem osztható természetes számok}\}$
 $B \setminus A = \{6\text{-tal osztható, de } 5\text{-tel nem osztható természetes számok}\}$
 $\overline{A} = \{5\text{-tel nem osztható természetes számok}\}$
 $\overline{B} = \{6\text{-tal nem osztható természetes számok}\}$
 - $A \cup B = \mathbb{Z}$; $A \cap B = \{0\}$; $A \setminus B = \mathbb{Z}^+$; $B \setminus A = \mathbb{Z}^-$; $\overline{A} = \mathbb{Z}^-$; $\overline{B} = \mathbb{Z}^+$.
 - $A \cup B = A$; $A \cap B = B$; $A \setminus B = \{\text{egyenlő szárú; de nem szabályos háromszögek}\}$, $B \setminus A = \emptyset$, $\overline{A} = \{\text{nem egyenlő szárú háromszögek}\}$;
 $\overline{B} = \{\text{nem szabályos háromszögek}\}$
 - $A \cup B = \mathbb{R}$; $A \cap B = \emptyset$; $A \setminus B = \mathbb{Q}$; $B \setminus A = \mathbb{Q}^*$; $\overline{A} = \mathbb{Q}^*$; $\overline{B} = \mathbb{Q}$.



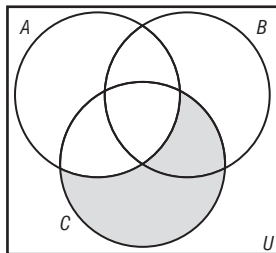
2. HALMAZELMÉLET – MEGOLDÁSOK

49. a) $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7; 9\};$ b) $A \cap B = \{3; 5\};$
 c) $\overline{A \cup B} = \{1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\};$ d) $A \cup \overline{B} = \{2; 3; 4; 5; 6; 8\};$
 e) $\overline{A \cap B} = \{1; 7; 9\};$ f) $A \cap \overline{B} = \{2\};$
 g) $\overline{A \cup B} = \{4; 6; 8\};$ h) $\overline{A \cap B} = \{1; 2; 4; 6; 7; 8; 9\};$
 i) $A \setminus B = \{2\};$ j) $\overline{A \setminus B} = \{4; 6; 8\}.$

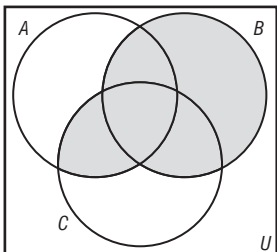
50. a)



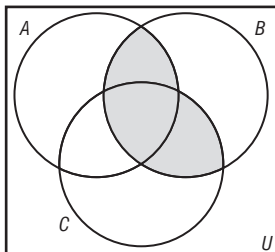
b)



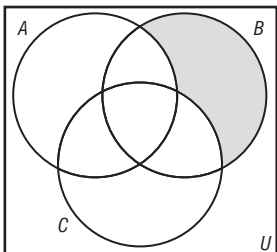
c)



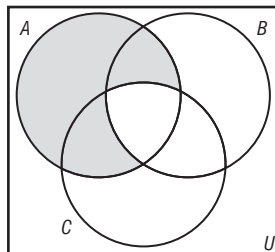
d)



e)



f)



51. Egy-egy lehetséges műveletsor:

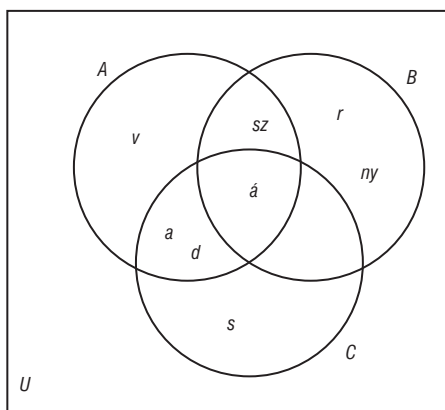
- a) $B \setminus A;$ b) $(A \cup C) \cap B;$
 c) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C);$ d) $(A \cap B) \cup C;$
 e) $(A \cap C) \setminus B;$ f) $(A \cup C) \setminus (A \cap C);$
 g) $\overline{A};$ h) $\overline{B \cup C}.$



2. HALMAZELMÉLET – MEGOLDÁSOK

52. $A = \{5; 10; 15; 20\}$, $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, $C = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$,
 a) $A \cap B \cap C = \{5\}$; b) $(A \cup B) \cap C = \{3; 5; 7\}$; c) $B \setminus A = \{1; 3; 7; 9\}$;
 d) $(B \cap C) \setminus (A \cap B) = \{3; 7\}$; e) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \{1; 9; 10; 15; 20\}$.
53. $A = \{1; 4; 9; 16; 25\}$, $B = \{10; 12; 14; 16; 18; 20\}$, $C = \{3; 6; 9\}$,
 a) $A \cap B \cap C = \emptyset$; b) $(A \cup B) \cap C = \{9\}$;
 c) $B \setminus A = \{10; 12; 14; 18; 20\}$;
 d) $A \setminus (B \cup C) = \{1; 4; 25\}$; e) $(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{3; 6; 9; 16\}$.
54. $H_1 = \{3; 5; 7; 9\}$, $H_2 = \{3; 5; 6; 7; 8; 9\}$, $H_3 = \{3; 5; 7; 9\}$, $H_4 = \{1; 3; 5; 6; 7; 9\}$,
 $H_5 = \{2; 4\}$ így $H_1 = H_3$.

55.



- a) $C \setminus (A \cup B) = \{s\}$; b) $(C \cap B) \setminus A = \emptyset$;
 c) $(B \setminus A) \cup C = \{a; d; \acute{a}; s; r; ny\}$; d) $\overline{C} \setminus B = \{v\}$;
 e) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{r; ny; s; v; a; d\}$; f) $\overline{C \cup B} = \{v\}$.
56. a) $A \cup B = B$; b) $A \cap B = A$; c) $A \setminus B = \emptyset$; d) $\overline{A} \cap B = B \setminus A$;
 e) $A \cap \overline{B} = \emptyset$; f) $A \setminus \overline{B} = A$; g) $\overline{A \setminus B} = U$.
 Egyenlők: c) = e) és b) = f)
57. Bármely ilyen halmaz esetén igaz: b) $A \cup B = A$ és d) $B \setminus A = \emptyset$.
58. A keresett ponthalmazok sík, illetve tér esetén...

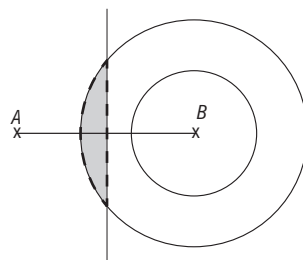
- a) P középpontú 4 cm sugarú körvonal, illetve gömbfelület.
 b) P középpontú 4 cm sugarú zárt körlap, illetve gömb.



2. HALMAZELMÉLET – MEGOLDÁSOK

59. A keresett ponthalmaz a), b) és c) esetben egy-egy A , illetve B középpontú adott sugarú körvonal metszéspontja. A körök metszéspontjainak száma
a) 2; b) 1; c) 0; d) Az AB szakasz felezőmerőlegese.

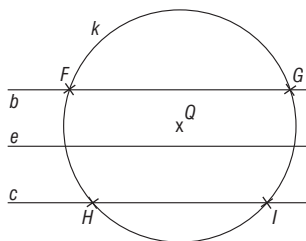
60. A keresett ponthalmaz az ábrán besatírozott nyitott (a határoló vonalak nélküli) körszelet.



61. Az e egyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza két az egyenessel párhuzamos egyenes.
a) Az A halmaz két párhuzamos egyenes.
b) A B halmaz az előző két egyenes és a közöttük lévő része a síknak.
c) A C halmaz az e egyenessel párhuzamos két-két egyenes b és c , illetve b' és c' közti része a síknak a határoló egyenesek nélkül (az ábrán beszínezett rész).

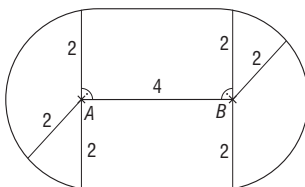


62. a) Az A halmaz a b és c egyenesek és a k kör közös pontjai: F, G, H, I .



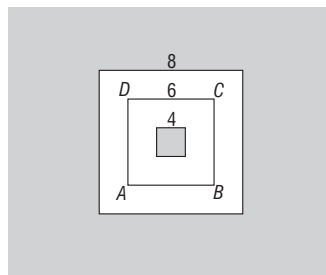
- b) Az A halmaz elemszáma a Q pont és az e egyenes távolságától függ. Ha $d(Q, e) < 2$ cm, akkor 4, ha $d(Q, e) = 2$ cm, akkor 3, ha $2 \text{ cm} < d(Q, e) < 8$ cm, akkor 2, ha $d(Q, e) = 8$ cm, akkor 1, és végül ha $d(Q, e) > 8$ cm, akkor 0 elemű az A halmaz.

63. A keresett ponthalmaz:



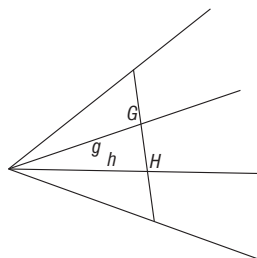
2. HALMAZELMÉLET – MEGOLDÁSOK

64. A keresett pontthalmaz az ábrán a sík kiszínezett része, beleértve a határoló szakaszokat.



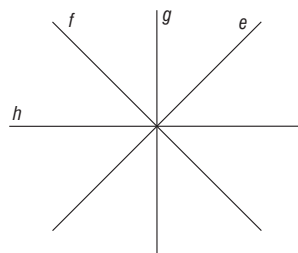
65. A keresett pontthalmaz...

- a) a szög csúcsából induló szöget felező félegyenes;
- b) az egyik szártól 2 cm, a másiktól 3 cm távolságra haladó egyenesek metszéspontja a szögtartományban.
- c) Vegyünk fel a szög két szárán egy-egy pontot a csúctól egyenlő távolságra! A két pontot összekötő szakaszt harmadoljuk (G, H pont)! A szög csúcsából induló G -re és H -ra illeszkedő egy-egy félegyenes (g, h) pontjai lesznek a keresett pontok.



66. Ha e és f párhuzamos, akkor a keresett pontok halmaza a két egyenes között haladó középpárhuzamos.

Ha e és f metszi egymást, akkor a metszéspontnál keletkezett szögek szögfelezői (g, h).



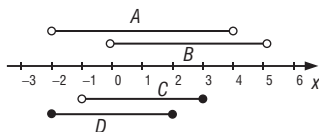
67. a) $K \cup SZ = \{a, „k” \text{ körvonal vagy az „e” szelő egyenesének pontjai}\};$
- b) $K \cap SZ = \{a \text{ körvonal és a szelő metszéspontjai}\};$
- c) $L \cap SZ = \{a \text{ szelőnek a körbe eső szakasza (húr)}\};$
- d) $L \setminus K = \{a \text{ körlap belső pontjai (nyitott körlap)}\};$
- e) $K \setminus L = \emptyset;$
- f) $L \setminus SZ = \{a \text{ körlapnak a húrtól különböző pontjai}\};$
- g) $SZ \setminus L = \{a \text{ szelőnek a körön kívüli két nyitott félegyenesese}\};$
- h) $(L \setminus K) \cap SZ = \{a \text{ szelőnek a körbe eső húrja a két végpont nélkül}\}.$

68. a) $P \setminus R = \{azok \text{ a paralelogrammák, amelyeknek két különböző hosszúságú oldala van}\};$ b) $M \cap T = N;$ c) $TR \cup P = TR;$ d) $R \cap T = N;$ e) $P \cap D = R;$ f) $N \setminus R = \emptyset;$ g) $M \cap P = R;$ h) $R \cup D = D.$



2. HALMAZELMÉLET – MEGOLDÁSOK

69. $A =]-2; 4[$; $B =]0; 5[$; $C =]-1; 3]$; $D = [-2; 2]$



70. a) $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$; b) $[-2; -1[$; c) $[-2; 7]$; d) $[-4; -3,5[$; e) $\left]1; \frac{3}{2}\right]$; f) $[-3; -2]$;
g) $\{\pi\}$; h) $\{ \}$; i) $]8; 16[$.

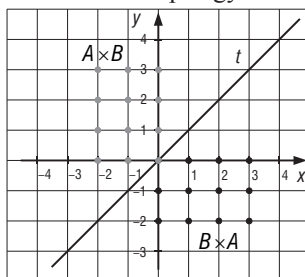
71. a) hamis; b) igaz; c) hamis; d) igaz; e) hamis; f) hamis; g) igaz.

72. a) igaz; b) hamis; c) igaz; d) hamis; e) hamis; f) hamis; g) hamis; h) hamis; i) igaz;
j) hamis; k) igaz; l) igaz; m) igaz.

73. a) $A \times B = \{(a; x); (a; y); (b; x); (b; y); (c; x); (c; y)\}$.
 $B \times A = \{(x; a); (y; a); (x; b); (y; b); (x; c); (y; c)\}$.
 $A \times A = \{(a; a); (a; b); (a; c); (b; a); (b; b); (b; c); (c; a); (c; b); (c; c)\}$.

74. a) $|A \times B| = 12$, $|A \times A| = 16$.

b) A két pontthalmaz t -re vonatkozó tükörképe egymásnak.



c) $12 + 16 - 1 = 27$.

75. a) $A \Delta B = A \cup B = \mathbb{Z}^+$;

b) $A \Delta C = \{a \text{ 3-mal nem osztható páros vagy a 3-mal osztható páratlan pozitív számok}\}$;

c) $B \Delta C = \{a \text{ 3-mal nem osztható páratlan vagy a 3-mal osztható páros pozitív számok}\}$.



2. HALMAZELMÉLET – MEGOLDÁSOK

$$76. |A \Delta B| = |(A \setminus B) \cup (B \setminus A)| = |A \setminus B| + |B \setminus A| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|.$$

77. a) $A = \{a; b; c; d; f\}$ és $B = \{a; b; c; e\}$;
 b) $A = \{a; b; d; f; g; h\}$ és $B = \{c; e; f; g\}$.

78. a) $A = \{10; 20; 40\}$, $B = \{40\}$ és $C = \{20; 30; 40; 50\}$;
 b) $A = \{1; 2; 3; 8; 9; 10\}$, $B = \{2; 4; 8; 10\}$ és $C = \{5; 6; 7; 8; 10\}$;
 c) $A = \{2; 4; 6; 8\}$, $B = \{6; 12; 18\}$ és $C = \{8; 18; 28; 38\}$.

79. $A = \{12; 15; 18; 21; \dots; 96; 99\}$ és $B = \{10; 11; 12; 13; \dots; 20\}$,
 így $|A| = \frac{99}{3} - 3 = 30$, $|B| = 11$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cup B| = 30 + 11 - 3 = 38$.

80. $A = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$ és $B = \{3; 6; 9\}$
 a) igaz; b) hamis; c) hamis; d) igaz; e) igaz.

81. Az A , B és C halmazok elemszámát összeadva a kettős metszetekben lévő elemek számát kétszer számoljuk, ezért egyszer ki kell ezeket vonni. Így azonban a hármas metszetben lévő elemeket 3-szor megszámloltuk és 3-szor ki is vontuk, azaz a hármas metszet elemszámát egyszer hozzá kell adni, hogy megkapjuk a 3 halmaz egyesítésének számosságát.

A szita formula 4 halmazra:

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|.$$

82. a) $|A \cap B| = 6 - 4 = 2$, így $|A \cup B| = 8 + 6 - 2 = 12$;
 b) $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 7 - 3 = 4$ és $|B| = 11$, így $|B \setminus A| = 8$;
 c) $|A| = 15$, $|B| = 13$ és $|A \cap B| = 2$, így $|A \cup B| = 13 + 15 - 2 = 26$;
 d) $|A \cap B| \leq 7$, ezért $10 \leq |A \cup B| \leq 17$, $0 \leq |A \setminus B| \leq 7$ és $3 \leq |B \setminus A| \leq 10$.

83. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ szita formula alapján a legnagyobb értéket akkor kapjuk, ha a három halmaz páronkénti metszetébe a lehető legkevesebb elem kerül, azaz
 $|(A \cap B) \setminus C| = |(A \cap C) \setminus B| = |(B \cap C) \setminus A| = 0$.



2. HALMAZELMÉLET – MEGOLDÁSOK

Ekkor $|A \cup B \cup C| = 16$. A legkisebb értéket akkor kapjuk, ha a három halmaz páronkénti metszetébe a lehető legtöbb elem kerül. Ez úgy érhető el, ha $|(A \cap B) \setminus C| = 0$; $|(A \cap C) \setminus B| = 2$; $|(B \cap C) \setminus A| = 4$.
Ekkor $|A \cup B \cup C| = 10$.

84. a) igaz; b) igaz; c) hamis; d) hamis; e) hamis; f) igaz; g) hamis; h) igaz; i) igaz; j) hamis.

85. Legyen $U = \mathbb{R}$!

- a) $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^*$;
b) {pozitív, páros számok}; {pozitív; 3-mal osztható számok}; {pozitív; 6-tal osztható számok};
c) $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$, $\left[1; \frac{5}{4}\right]$ és $\mathbb{N}$.

86. a) pl.: $\{x; y\}$; $\{y; z\}$ és $\{x; z\}$;
b) pl.: egy háromszög alapú hasáb 3 oldallapjának síkja.

87. Véges halmaz: {páros prímszámok}, elemszáma 1; {a π tizedes tört alakjának számjegyei}, elemszáma 10.

Megszámlálhatóan végtelen halmazok: $\{k^2 | k \in \mathbb{Z}\}$; {páros természetes számok}; $\mathbb{Q}$.

Nem megszámlálható halmazok: {valós számpárok}; $[2; 4]$; {egy r sugarú körvonal pontjai}.

88. Két halmaz számossága egyenlő, ha közöttük kölcsönösen egyértelmű függvény (bijekció) adható meg. Adjunk meg egy lehetséges hozzárendelést!

- a) $f: B \rightarrow A; x \mapsto 10\left(\frac{x}{3} - 1\right) + 3$
b) $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}; g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 1 \\ \frac{x}{2}, & \text{ha } x = 2k, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}^+. \\ -\frac{x-1}{2}, & \text{ha } x = 2k+1 \end{cases}$
c) $h: \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0; 1]; x \mapsto \sin x$



2. HALMAZELMÉLET – MEGOLDÁSOK

89. Vegyük fel a két szakaszt egymással párhuzamosan! Legyen a szakaszok egy-egy végpontját összekötő két egyenes metszéspontja O ! Az O középpontú vetítés az egyik szakasz pontjait a másikba viszi át. Ez a transzformáció kölcsönösen egyértelmű.

90. Jelölje x a társaság létszámát, SZ a szökek, K pedig a kék szeműek halmazát!

$$|SZ| = 0,45x \text{ és } |K| = 0,6x, \text{ így } |K \cap SZ| = \frac{2}{3} \cdot 0,6x = 0,4x.$$

a) A szökeknek $\frac{|K \cap SZ|}{|SZ|} = \frac{8}{9}$ része kék szemű.

b) A társaság $\frac{x - |K \cup SZ|}{x} = \frac{x - 0,65x}{x} = 0,35$ része, azaz 35%-a se nem szöke, se nem kék szemű.

91. Legyen $A = \{\text{a 3-mal osztható, 3-jegyű, pozitív egész számok}\};$

$B = \{\text{a 4-gyel osztható, 3-jegyű, pozitív egész számok}\};$

$C = \{\text{az 5-tel osztható, 3-jegyű, pozitív egész számok}\}!$

a) $A \cap B \cap C = \{\text{a 60-nal osztható, 3-jegyű, pozitív egészek}\}$, ezért

$$|A \cap B \cap C| = 15 \text{ db ilyen szám van.}$$

b) Felhasználva, hogy $|A| = 300$, $|B| = 225$ és $|C| = 180$, valamint $|A \cap B| = 75$, $|A \cap C| = 60$ és $|B \cap C| = 45$, a szita formula alapján:

$$|A \cup B \cup C| = 300 + 225 + 180 - 75 - 60 - 45 + 15 = 540 \text{ db ilyen szám van.}$$

c) $A \cup B \cup C$ a 900 db 3-jegyű számból el kell venni a fenti 540 db számot, azaz 360 db.

d) $|(A \cup B) \setminus C| = |A \cup B \cup C| - |C| = 360 \text{ db.}$

e) $|(A \cap C) \setminus B| = |A \cap C| - |A \cap B \cap C| = 45 \text{ db.}$

f) $|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 3 \cdot |A \cap B \cap C| = 135 \text{ db.}$

92. Jelölje x az osztálylétszámot, H a hideg reggelit, M a meleg reggelit kérők halmazát!

$$|H| = \frac{x}{2}, \quad |M| = \frac{2}{3}x \text{ és } |H \cap M| = 7.$$

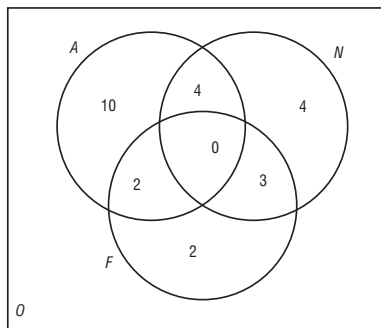
A szita formulát alkalmazva: $x - 2 = \frac{x}{2} + \frac{2}{3}x - 7.$

Az egyenlet megoldása $x = 30$, azaz 30 fős az osztály.



2. HALMAZELMÉLET – MEGOLDÁSOK

93. Jelölje A az angol, N a német és F a francia nyelvvizsgával rendelkezők halmazát! A feladat szövege alapján a Venn-diagramban meghatározható az egyes halmazrészekbe tartozó diákok száma:
 $U = O = \{\text{az osztály tanulói}\}$



- a) Pontosan egy nyelvvizsgája $10 + 4 + 2 = 16$ tanulónak van.
- b) $28 - (10 + 4 + 2 + 2 + 4 + 3) = 3$ tanulónak nincs nyelvvizsgája az osztályban.
94. A megoldás menete hasonló a 93. feladatéhoz. Az osztálylétszám 25 fő.
95. A megoldás menete hasonló a 93. feladatéhoz. Abaligeten 19, Budapesten 18, a Cserhátban pedig 18 diák vett részt a kiránduláson.
96. A megoldás menete hasonló a 93. feladatéhoz. A csapat létszáma 20 fő.
97. Ha x -szel jelöljük a mindkét túrán résztvevők számát, akkor az osztálylétszám $(11 + 13 - x) + x = 24$, azaz valóban páros szám.
98. Ha a két tagozatra ugyanannyian jelentkeztek volna, – jelölje a számukat x –, akkor a jelentkezők száma $2x - 29$, ami páratlan szám, tehát nem lehet egyenlő 76-tal.
99. a) A 3-féle forma mindegyike lehet 4-féle színű, ami 12 különböző figurát jelent, de ezek mindegyike lehet alacsony vagy magas, így 24 különböző bábu van a játékban.
- b) $|P| = 3 \cdot 2 = 6$, $|K \cap P| = 2$, $|K \cup P| = |K| + |P| - |K \cap P| = 4 \cdot 2 + 6 - 2 = 12$,
 $|P \setminus M| = 3$, $|\overline{K} \cap M| = 2 \cdot 4 = 8$, $|\overline{K \cup M}| = |\overline{K} \cap \overline{M}| = 2 \cdot 4 = 8$ és
 $|\overline{K \cap P \cap M}| = 24 - 1 = 23$.



3. Algebra – megoldások

3.1. Hatványozás egész kitevővel

100. a) 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144; 169;

b) 8; 27; 64; 125; 16; 81; 625;

c) 1; 100000; 64; 1; -3; 32; nincs értelmezve; $\frac{4}{49}$; $\frac{1}{4}$; 1; 0; 1;

d) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{1000}$; $-\frac{1}{6}$; nincs értelmezve; 49; 25; $-\frac{1}{27}$; $\frac{13}{5}$; 64; 4.

101. $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{a^5}$; 1; $\frac{a^2}{b^2}$; $\frac{c}{a}$; 1; $\frac{b^3}{c^3}$, ahol $a, b, c, x, y \neq 0$.

102. a) $1024 \cdot 100 = 102400$; b) $\frac{9}{2}$; c) $-\frac{25}{2}$; d) $(32 - 25)^3 = 343$.

103. a) $2 \cdot 64 = 128$; b) 32; c) $9 - 3 = 6$; d) 26; e) $2 \cdot y^{10}$; f) 25;
g) $2 \cdot 2^6 = 2^7 = 128$.

104. a) $\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{11}{1000}$; d) $-\frac{1}{x^4}$, ahol $x \neq 0$; e) $1 + a^3$; f)
 $\frac{6}{b^2}$, ahol $b \neq 0$.

105. a) $\frac{25}{4}$; b) $\frac{3}{16}$; c) 3; d) 9.

106. a) 169; b) 7^8 ; c) $2^5 = 32$; d) $10^3 = 1000$; e) 16; f) a^{13} ; g) $12a^7$; h) $(xy)^9$.

107. a) 1; b) 8; c) 10^6 ; d) 27; e) $6^{-6} = \frac{1}{6^6}$; f) x^2 ; g) $3a^4$;

h) $\frac{b^{-5}}{2} = \frac{1}{2b^5}$, ahol $b \neq 0$. i) $\frac{2}{3}c^6$.

108. a) $7^{-8} \cdot 7^9 = 7$; b) 10^{-7} ; c) $\frac{1}{27}$; d) $\frac{2^6 \cdot 3^6 \cdot 3^{-6} \cdot 5^{-6}}{2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 5^{-4} \cdot 2^8 \cdot 3^4} = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^{-2} = \frac{4}{25}$.



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

109. a) $3^4 = 81$; b) 10^7 ; c) $2 \cdot 2^8 \cdot 5^9 = 10^9$; d) 0.

110. a) a^2 ; b) b^{-10} ; c) c^{-6} ; d) 1.

111. a) $x^3 y^3$; b) $a^{41} b^{27}$; c) $\frac{x^2 \cdot y^2 \cdot y^6 \cdot x^4 \cdot y^7}{x^6 \cdot y^3 \cdot y^6 \cdot x^2} = x^{-2} y^6 = \frac{y^6}{x^2}$; d) $\frac{5y^2}{2}$;

e) $\frac{3^3 \cdot a^6 \cdot b^3 \cdot c^6 \cdot b^2 \cdot a^3 \cdot c^6}{c^{12} \cdot a^{10} \cdot 3^2 \cdot b^5} = 3a^{-1} = \frac{3}{a}$; f) $6a^2 b^{-1}$; g) b^9 ; h) $\frac{27}{125} x^6$; i) $a^5 b$;

j) x ; k) $\frac{b^6}{a^2}$; l) $\frac{a^5}{b^4}$; m) $\frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot a^{-8} \cdot 3^2 \cdot a^{-6} \cdot b^4}{3^{-2} \cdot a^{-3} \cdot b^3 \cdot 2^3 \cdot a^{-5} \cdot b} = 2 \cdot 3^8 \cdot a^{-6}$;

n) $2^4 \cdot 3^{-2} \cdot a^{-6} \cdot c^{-3} = \frac{16}{9a^6 c^3}$.

112. A $2^{-10} \cdot 2^{-9} \cdot 2^{-8} \cdot \dots \cdot 2^{-1} \cdot 2^0 \cdot 2^1 \cdot \dots \cdot 2^8 \cdot 2^9 \cdot 2^{10}$ szorzatban az ellentett kitevőket párosával összeadva az eredmény $2^0 = 1$.

113. A szorzatban az azonos kitevőjű hatványokat összeszorozva adódik:

$10^1 \cdot 10^2 \cdot \dots \cdot 10^6 = 10^{1+2+\dots+6} = 10^{21}$, amely 21 db 0-ra végződik.

114. a) $\frac{2^{16}}{2^{12}} = 16$; b) $\frac{5^6 \cdot 7^3 \cdot 3^6}{3^5 \cdot 3 \cdot 7} = 5^6 \cdot 7^2$; c) $\frac{2^{20} \cdot 5^3}{2^6 \cdot 5^3} = 2^{14}$; d) 1; e) 5;

f) $\frac{3^6 \cdot 5^3 \cdot 2^{12} \cdot 7^4 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^5}{3^4 \cdot 7^4 \cdot 2^8 \cdot 3^4 \cdot 2^8 \cdot 5^8} = 54$.

115. a) 3; b) $\frac{3^4 \cdot 5^2 + 3^3 \cdot 5^3}{3^3 \cdot 5^2} = 3 + 5 = 8$; c) 5.

116. a) $\frac{2^5 \cdot (2^2 - 2) + 3 \cdot 2^5}{5^2 \cdot (5 - 1)} = \frac{2^5 \cdot 5}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{8}{5}$; b) 3^6 .

117. Az azonos alapú, illetve az azonos kitevőjű hatványok összehasonlítása alapján, valamint a hatványozás definícióinak segítségével:

a) 2^6 ; egyenlők; 8^7 ;

b) $\frac{1}{13^2} > \frac{1}{15^2}$, azaz 13^{-2} ; 30^{-1} ; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$;

c) egyenlők; $\left(\frac{5}{7}\right)^{-8}$; $\left(\frac{29}{17}\right)^4$;



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

d) egyenlők; $5^{3 \cdot 15} > 5^{4 \cdot 11}$, azaz 125^{15} ;

e) $2^2 \cdot (1+2) < 2^2 \cdot 2^3$, azaz 2^5 ; 3^9 ;

f) $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^2} = \frac{1+5}{5^3} < \frac{2}{5^2} - \frac{3}{5^3} = \frac{10-3}{5^3}$;

g) $9^4 = 3^8 < 2^{14} + 6 \cdot 2^{13} = 2^{13} \cdot (2+6) = 2^{13} \cdot 2^3 = 2^{16} = 4^8$;

h) $\frac{5}{2^6 \cdot 3^9} + \frac{2}{6^7} = \frac{5 \cdot 2 + 2 \cdot 9}{2^7 \cdot 3^9} = \frac{28}{2^7 \cdot 3^9} < \frac{1}{6^6} - \frac{8}{2^7 \cdot 3^8} = \frac{2 \cdot 3^3 - 8 \cdot 3}{2^7 \cdot 3^9} = \frac{30}{2^7 \cdot 3^9}$;

i) $4^{-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}$, azaz egyenlők;

j) $6^{12} = 2^{12} \cdot 3^{12} = 3^4 \cdot (2^{12} \cdot 3^8) > 12^8 = 2^{16} \cdot 3^8 = 2^4 \cdot (2^{12} \cdot 3^8)$;

k) $(2^9 + 2^9)^9 = (2 \cdot 2^9)^9 = 2^{90} > 4^{(3^3)} = (2^2)^{27} = 2^{54}$.

118. a) $5,2 \cdot 10^3$; $1,01 \cdot 10^3$; $9 \cdot 10^6$; $4,13 \cdot 10^2$;

b) $6,2 \cdot 10^{-1}$; $3 \cdot 10^{-4}$; $5,05 \cdot 10^{-2}$; $4 \cdot 10^{-2}$.

119. 32100; 502,1; 0,2; 0,00314.

120. a) $56 \cdot 10^5 = 5,6 \cdot 10^6$; $7,6 \cdot 10^2$;

b) $3 \cdot 10^{-8}$; $\frac{21 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^{-4}} = 7 \cdot 10^9$;

c) $16 \cdot 10^6 = 1,6 \cdot 10^7$; $2,7 \cdot 10^{-5}$;

d) $5,3 \cdot 10^4$; $12 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-4} = 20 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-3}$;

e) $\frac{3,1 \cdot 10^{-3} + 0,4 \cdot 10^{-3} - 1,5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-1}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-1}} = 10^{-2}$.

f) 3.

121. a) A 70 év közelítőleg $70 \cdot 365 = 25\,550$ nap, ezalatt $25\,550 \cdot 2 \cdot 10^4 = 5,11 \cdot 10^8$ liter levegőt lélegez be egy ember.

b) Mivel $1 \text{ liter} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$ és a levegőoszlop térfogata $V = A \cdot h$, ezért az $5,11 \cdot 10^8$ liter térfogatú légoszlop magassága:

$$\frac{5,11 \cdot 10^5 \text{ m}^3}{1 \text{ m}^2} = 5,11 \cdot 10^5 \text{ m} = 511 \text{ km}.$$



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

122. a) $\frac{149,6 \cdot 10^6 \text{ km}}{3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \approx 499 \text{ s} \approx 8,3 \text{ perc.}$

b) A Hold–Föld távolság: $1,28 \text{ s} \cdot 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ km.}$

123. a) 4,24 év.

b) 1 év = $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 3,1536 \cdot 10^7 \text{ s}$, így

1 fényév = $3,1536 \cdot 10^7 \text{ s} \cdot 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 9,46 \cdot 10^{12} \text{ km}$, tehát a legközelebbi csillag

$4,24 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} \text{ km} = 4,01 \cdot 10^{13} \text{ km} = 4,01 \cdot 10^{16} \text{ m}$ távolságra van tőlünk.

c) $\frac{8000}{4,01 \cdot 10^{13}} = 2 \cdot 10^{-10}$ -szeresére, azaz 20-milliárdomod részére kellene csökkenteni a Világegyetemet.

124. Az elektronok száma: $\frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 6,25 \cdot 10^{18} \text{ db.}$

125. Az 1 g szénben lévő elektronok tömege:

$\frac{6 \cdot 10^{23}}{12} \cdot 6 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 2,73 \cdot 10^{-7} \text{ kg} = 2,73 \cdot 10^{-4} \text{ g.}$

126. A gáztörvényt rendezve: $T = \frac{p \cdot V}{N \cdot k} = \frac{10^5 \cdot 10^{-3}}{\frac{6 \cdot 10^{23}}{4} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 48,3 \text{ K.}$

3.2. Betűs kifejezések

127. a) $2k$, $k \in \mathbb{Z}^+$; b) $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$; c) $4n$, $n \in \mathbb{Z}^+$; d) $7k+5$, $k \in \mathbb{N}$;
e) $10m+2$, $m \in \mathbb{N}$; f) $10k+m$, ahol $0 \leq m \leq 9$ és $0 < k \leq 9$ és $m \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{N}$;
g) n^2 , $n \in \mathbb{Z}^+$.

128. Egyneműek: $2xy$; $-xy$; $1,5xy$, illetve $\frac{1}{3}x^2y$; $4x^2y$.

a) $5xy^2$ harmadfokú, az együtthatója 5; b) $2xy$ másodfokú, az együtthatója 2;

c) $\frac{1}{3}x^2y$ harmadfokú, az együtthatója $\frac{1}{3}$; d) $-xy$ másodfokú, az együtthatója -1 ;



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

- e) $1,5xy$ másodfokú, az együtthatója $1,5$; f) $4x^2y$ harmadfokú, az együtthatója 4 ;
g) x^2y^2 negyedfokú; az együtthatója 1 .

129. a) $3ab$ 2-határozatlanú, 1-tagú, másodfokú, szorzat;
b) $3a + b$ 2-határozatlanú, 2-tagú, elsőfokú, összeg;
c) $a^2 + 2ab + b^2$ 2-határozatlanú, 3-tagú, másodfokú, összeg;
d) $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ 1-határozatlanú, 4-tagú, harmadfokú; összeg;
e) $(2x + y)^2$ 2-határozatlanú, 1-tagú, másodfokú, szorzat;
f) $x^2y - xy^2$ 2-határozatlanú, 2-tagú, harmadfokú, összeg;
g) $a \cdot (a - b)^2$ 2-határozatlanú, 1-tagú, harmadfokú, szorzat.

130. a) harmadfokú: $2a^3 + 3a^2 - 4a$;
b) ötödfokú: $4x^5 + 5x^4 + x^2 - 2x - 6$;
c) harmadfokú: $11a^3 + 7a^2b - 3ab^2 + 6ab - b^2$;
d) kilencedfokú: $\frac{5}{3}d^9 - c^4d^4 - \frac{3}{5}c^2d^5 + c^6$.

131. Az összegük harmadfokú: $3a^3 + 3a^2 - 7a + 1$; a különbségük harmadfokú:
 $3a^3 - a^2 - a - 1$; a szorzatuk ötödfokú: $6a^5 - 7a^4 - 8a^3 + 13a^2 - 4a$.

132. a) $7x$; $5a^3$; $-xy$; $\frac{2}{3}b^2$; b) $4,5a - 2b$; $3x^2 + 7x$; c) $-2a^2 + 2a$; xy ;
d) $a^3b - ab^3$; $\frac{1}{2}ab^2$; e) 0 ; $2y$; f) $10a$;
g) $\frac{5}{4}xy + \frac{2}{3}yz - \frac{3}{2}xz$; h) $3a^2 - 3$; $4ab$; i) $6x^2 - 2x$.

133. $2k + (2k + 2) + (2k + 4) = 6k + 6, k \in \mathbb{N}$.

134. A négyszög három oldala: x , $x + x + y = 2x + y$ és $2x + y - (x - y) = x + 2y$, így
a negyedik oldala: $4x + 5y - (x + 2x + y + x + 2y) = 2y$.

135. a) $10t + (t + 2) = 11t + 2$, ahol $1 \leq t \leq 7, t \in \mathbb{Z}$.
b) A felcserélt jegyű szám értéke $10(t + 2) + t = 11t + 20$, így a két szám összege
 $22t + 22$.



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

136. a) $4a^2$; x^3y^2 ; b) $2a^3$; $-3b^6$;
 c) $-3c^4$; $-\frac{5}{3}x^8$; d) $18d^6$; e^{k+2} ;
 e) $-9a^2b^2$; $4xy$; f) $12a^3b^4$; $-2x^3yz^2$;
 g) $7a^3b^3$; $x^2y^2z^2$; h) $2a^5b^5c^3$; $1,8x^{12}y^5$.

137. a) $2a-2b$; $a+\frac{1}{2}ab$;
 b) $5a^2-10a$; $-4b^2-12b$;
 c) $\frac{x^2}{3}+\frac{xy}{3}$; $12b-3b^3$;
 d) $2c^5-\frac{c^3}{2}$; $-\frac{5}{12}d^3+\frac{5}{2}d^2-\frac{5}{6}d$;
 e) $x^3-x^4+x^5$; $5a^2b+10a^3b-15a^2b^2$;
 f) $-3a^2b^2-2ab^3+ab^2c$; $20x^3y-5x^2y^2+15xy^3$;
 g) $x^2y^2-\frac{x^3y}{2}$;
 h) $8a-9a^3-2+6a^3=-3a^3+8a-2$;
 i) $3p^5q^3-6p^3q^5+21p^3q^2$;
 j) $8x^{2n}+5x^{n+2}-20x^{n+1}$.

138. a) $24a-18b-5a-10b+8b-16a=3a-20b$;
 b) $9b^2+14c^2$; c) $4x^2+2x+6$; d) $3p-10p^2+2p+4p^2=-6p^2+5p$.

139. a) $ab+ad+bc+bd$; $x^2+3x-10$;
 b) a^2-a-6 ; $x^2+2x-2y-xy$;
 c) b^2-a^2 ; $3x^2-10xy+3y^2$;
 d) $14x^2-3xy-2y^2$; $12a^4+5a^2b-2b^2$;
 e) $2a^3-a^5+6a^2-3a^4$; $a^2b^3-5a^3b^2+ab^3-5a^2b^2$;
 f) $\frac{2}{9}x^3y^3-\frac{1}{6}x^4y^2-\frac{2}{5}x^2y^4+\frac{3}{10}x^3y^3=\frac{47}{90}x^3y^3-\frac{1}{6}x^4y^2-\frac{2}{5}x^2y^4$;
 $b^3c-\frac{16}{5}b^3c^3+\frac{5}{8}b^2c^3-2b^2c^5$;
 g) x^3-1 ; a^3+8 ;



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

- h) $a^3 + b^3$; $x^4 - y^4$;
 i) $2y^2 - y^4 + 5y^3 + 6 - 3y^2 + 15y - 2y + y^3 - 5y^2 = -y^4 + 6y^3 - 6y^2 + 13y + 6$;
 j) $49a^2b^2 - a^2 + 2ab - b^2$;
 k) $(x+1)(x^2+x-6) = x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6 = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$;
 l) $ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c + a^2c - ac^2$.

140. a) $x^2 - 3x - 4 + x^2 - x - 6 = 2x^2 - 4x - 10$;
 b) $-y - 12$;
 c) $x^3 + 10xy - 7y^3 - 4$.

141. a) $a^2 + 2ab + b^2$; $4x^2 + 4xy + y^2$; $\frac{x^2}{4} + x + 1$;
 b) $b^2 - 2bc + c^2$; $9a^2 - 6ax + x^2$; $4a^2 - \frac{4ab}{3} + \frac{b^2}{9}$;
 c) $x^2 - y^2$; $a^2 - 16$; $\frac{b^4}{25} - \frac{a^2}{9}$.

142. a) $a^2 + 2ab + b^2$; $a^2 + 10a + 25$;
 b) $a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - 8a + 16$;
 c) $4a^2 - 4a + 1$; $9a^2 + 6ab + b^2$;
 d) $9a^2 - 24ab + 16b^2$; $\frac{x^2}{16} - x + 4$;
 e) $4x^2 - 2xy + \frac{y^2}{4}$; $\frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{9}$;
 f) $\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{9}$; $\frac{9}{49}x^2y^2 - 2x^2y + \frac{49}{9}x^2$;
 g) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$; $\frac{x^2}{4} - 4xy^2 + 16y^4$;
 h) $x^6 - 2x^3y^3 + y^6$; $\frac{4}{9}x^2y^6 + x^3y^4 + \frac{9}{16}x^4y^2$;
 i) $25a^4b^2 + 30a^3b^3 + 9a^2b^4$; $\frac{x^2y^2}{4} - \frac{3xy}{5} + \frac{9}{25}$;
 j) $\frac{x^6}{9} + \frac{x^3y^4}{6} + \frac{y^8}{16}$; $a^6b^4 - 2a^4b^5 + a^2b^6$;
 k) $2^{2n} + 2^{n+1} + 1$; $3^{2n} - 2 \cdot 3^{n+k} + 3^{2k}$;
 l) $9a^{2k} - 6a^kb^k + b^{2k}$; $a^{4n} + 2 + a^{-4n}$.



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

- 143.** a) $a^2 - b^2$; $x^2 - 25$;
 b) $16 - 81m^2$; $\frac{x^2}{9} - \frac{16}{25}$;
 c) $4c^2 - 49d^2$; $k^4 - m^6$;
 d) $1 - 64c^{2k}$; $k^{6n+2} - 121$;
 e) $49 - (a+b)^2 = 49 - a^2 - 2ab - b^2$;
 f) $(y^3)^2 - (1-x)^2 = y^6 - 1 + 2x - x^2$.
- 144.** a) $(x-y)^2$; $(a+1)^2$;
 b) $(2b+1)^2$; $(3y^3-2)^2$;
 c) $(x+5)^2$; $(2a-9b)^2$;
 d) $(5a+8b)^2$; $\left(\frac{x^2}{2} - y\right)^2$;
 e) $(y^2 - x^3)^2$; $(a^2 + 2b^2)^2$;
 f) $(9a^3b - 5a^2b)^2$; $\left(\frac{3}{12}xy + \frac{2}{6}x^4y^5\right)^2 = \left(\frac{xy}{4} + \frac{x^4y^5}{3}\right)^2$;
 g) $(x^6 + 8y^6)^2$;
 h) $\left(\frac{a^n}{3} + 5\right)^2$;
 i) $\left(\frac{7x^{3n}}{4} - \frac{y^{4n}}{2}\right)^2$.
- 145.** a) $(a+b)^2 \Rightarrow 2ab$; $(b-1)^2 \Rightarrow 1$;
 b) $(c+3)^2 \Rightarrow 9$; $(x+4)^2 \Rightarrow 8x$;
 c) $(3a+5b)^2 \Rightarrow 9a^2$; $(2y-3x)^2 \Rightarrow 9x^2$;
 d) $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{xy}{3}$; $\left(\frac{5}{4}p + \frac{2}{5}q\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{25}q^2$;
 e) $(2x-3y)^2 \Rightarrow 12xy$; $\left(\frac{a^2}{5} + 6\right)^2 \Rightarrow \frac{12}{5}a^2$;
 f) $(7bc+1)^2 \Rightarrow 1$; $(x^3y^2 - y)^2 \Rightarrow y^2$;
 g) $\left(3a + \frac{b}{3}\right)^2 \Rightarrow 9a^2$; $\left(\frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{7}x\right)^2 \Rightarrow \frac{9}{49}x^2$.



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

146. a) $(x+3)^2 - 9 + 10 = (x+3)^2 + 1$;
 b) $(a-4)^2 - 3$;
 c) $\left(b + \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25} - \frac{1}{25} = \left(b + \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}$;
 d) $-(y^4 - 2y^2 - 6) = -[(y^2 - 1)^2 - 1 - 6] = -(y^2 - 1)^2 + 7$;
 e) $-(k^3 + 5)^2 - 3$;
 f) $(2a + 7)^2 - 4$;
 g) $(3c - 2)^2 + 7$;
 h) $2(x^2 + 10x) + 49 = 2[(x+5)^2 - 25] + 49 = 2(x+5)^2 - 1$;
 i) $-3(y-3)^2 + 9$.
147. a) $5x^2 + 2x + 10$
 b) $3a^2 - 12ab + 12b^2 - 9a^2 - 6ab - b^2 = -6a^2 - 18ab + 11b^2$;
 c) $-41a + 31$;
 d) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ac - 2ab - 2bc + ab + ab - b^2 - bc = a^2 + c^2 + 3ac - ab - 3bc$;
 e) $(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a^4 - 1$;
 f) $(b^2 - 9)^2 = b^4 - 18b^2 + 81$.
148. a) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; b) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$;
 c) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$; d) $b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3$;
 e) $27 - 27x + 9x^2 - x^3$.
149. a) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
 b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; $1 - 3x + 3x^2 - x^3$;
 c) $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$; $8m^3 - 12m^2 + 6m - 1$;
 d) $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$; $a^6 - 9a^4 + 27a^2 - 27$;
 e) $\frac{x^3}{27} - \frac{x^2y}{3} + xy^2 - y^3$; $x^9 + 3x^8 + 3x^7 + x^6$;
 f) $\frac{a^3}{8} + \frac{a^2b}{4} + \frac{ab^2}{6} + \frac{b^3}{27}$; $\frac{27x^3}{8} - \frac{9x^2y}{2} + 2xy^2 - \frac{8y^3}{27}$;
 g) $2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x+y} + 3 \cdot 2^{x+2y} - 2^{3y}$; $a^{3n} + 3a^{2n}b^n + 3a^n b^{2n} + b^{3n}$.
150. a) $a^3 + b^3$; $x^3 + 8$; $1 + y^3$;
 b) $x^3 - y^3$; $a^3 - 27$; $8 - x^6$.



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

151. a) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$; b) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$;
 c) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$.

152. a) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
 b) $4a^2 + b^2 + 9c^2 + 4ab + 12ac + 6bc$;
 c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz$;
 d) $x^4 + 25x^2 + 1 + 10x^3 - 2x^2 - 10x = x^4 + 10x^3 + 23x^2 - 10x + 1$;
 e) $a^2b^2 + a^4b^2 + a^2b^4 - 2a^3b^2 - 2a^2b^3 + 2a^3b^3$.

153. Emelje ki a közös szorzótényezőket!
 a) $8(a+b)$, $13(x-y)$, $4(x+3)$;
 b) $3b(2a-3)$, $8c(4c+3b)$, $7a(2x-3y)$;
 c) $a(a+5)$, $-y(y+3z)$, $3bc(3b+2c)$;
 d) $x(x^2+x-1)$, $k(k+2km+3m)$;
 e) $ab(a+2+b)$, $6ax(8a^2x+3a-5x^2)$;
 f) $5xy^2z(5z^2-3x^2+7xz-10)$;
 g) $x^n(x^n+2)$;
 h) $a^n(1-a-a^2)$;
 i) $c^{k-2}(c^{k+2}+1+c^2)$.

154. A közös kéttagú szorzótényezők kiemelésével:
 a) $(c+d)(a+b)$;
 b) $(y-5)(2x+3y)$;
 c) $(m+3)(5k-2)$;
 d) $4(p-2)-q(p-2)=(p-2)(4-q)$;
 e) $(b+5)(3a+1)$;
 f) $(c-4)(b-1)$;
 g) $6c(d-3)+4(d-3)=(d-3)(6c+4)=2(d-3)(3c+2)$;
 h) $4(2x+y)$.

155. Csoportosítva a tagokat, majd kétszeres kiemeléssel a kapott szorzatok:
 a) $(x+y)+a(x+y)=(x+y)(1+a)$; b) $(x+y)(1-a)$;
 c) $(a-b)(x+2)$; d) $(a-b)(x-5)$;
 e) $(a+d)(b+c)$; f) $(a-b)(2x-3)$;
 g) $(m-k)(m+4)$; h) $(x-y)(6p+5q)$;
 i) $(5a+6x)(2a^2+b^2)$.



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

156. Az elsőfokú tag megfelelő felbontásával, majd csoportosítással és kiemeléssel:

a) $x^2 + 4x + 2x + 8 = x(x + 4) + 2(x + 4) = (x + 4)(x + 2)$;

b) $y^2 - 4y - 3y + 12 = (y - 4)(y - 3)$;

c) $(p - 5)(p + 3)$;

d) $-q^2 + 4q - 3q + 12 = q(-q + 4) + 3(-q + 4) = (4 - q)(q + 3)$.

157. a) $(a - b)(a + b)$; $(x + 3)(x - 3)$; $(4 - c)(4 + c)$; $\left(d - \frac{1}{2}\right)\left(d + \frac{1}{2}\right)$;

b) $\left(2a - \frac{3}{5}b\right)\left(2a + \frac{3}{5}b\right)$; $(4c^2 + d^4)(2c + d^2)(2c - d^2)$; $(13xy + 10)(13xy - 10)$;

$(0,1m^5 + 0,5k^3)(0,1m^5 - 0,5k^3)$;

c) $(a + 1)^2$; $(b - 5)^2$; $(c^2 + 3)^2$; $(2d - 3c)^2$;

d) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$; $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$; $(b - 3)(b^2 + 3b + 9)$;

$(1 + 2a)(1 - 2a + 4a^2)$; $(4k - 5)(16k^2 + 20k + 25)$;

e) $(x + y)^3$; $(a + 3)^3$;

f) $(b - c)^3$; $(2p - 1)^3$.

158. a) $(6a - b)(6a + b)$; b) $(x - y)^2$; c) $(x + 2 - 3y)(x + 2 + 3y)$; d) $(3a^2 + 1)^2$;

e) $(7y^2 - 8)(7y^2 + 8)$; f) $\left(\frac{2bc}{3} - \frac{3}{2}\right)^2$;

g) $(2a - (5a - b))(2a + 5a - b) = (b - 3a)(7a - b)$;

h) $(x - 1)^3$;

i) $(4a - b)(2a + 3b)$;

j) $(5b^3 + 9)^2$;

k) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4)$;

l) $(3k + 2m)^3$;

m) $(1 - x^3)(1 + x^3) = (1 - x)(1 + x + x^2)(1 + x)(1 - x + x^2)$;

n) $(a^n - b^{3n})(a^n + b^{3n})$;

o) $(b^{2n} - 1)^2$.

159. Használja fel az $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ azonosságot!

a) $(50 - 1)(50 + 1) = 50^2 - 1^2 = 2500 - 1 = 2499$;



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

- b) $(100+3)(100-3) = 100^2 - 3^2 = 9991$;
 c) $(14+6)(14-6) = 20 \cdot 8 = 160$;
 d) 6384; e) 99,96; f) 2800; g) 999 999; h) 17400; i) 3.

160. a) $(y+3)^2 - 1 = (y+3+1)(y+3-1) = (y+4)(y+2)$;

b) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = (x+1)(x+2)$;

c) $(a+5)(a-3)$;

d) $(y-7)(y+6)$;

e) $-(b+5)(b-1) = (b+5)(1-b)$;

f) $2\left(c^2 + \frac{9}{2}c - \frac{5}{2}\right) = 2\left[\left(c + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{81}{16} - \frac{5}{2}\right] = 2\left[\left(c + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{121}{16}\right] =$
 $= 2\left(c + \frac{9}{4} - \frac{11}{4}\right)\left(c + \frac{9}{4} + \frac{11}{4}\right) = 2\left(c - \frac{1}{2}\right)(c+5) = (2c-1)(c+5)$;

g) $(5a+2)(a+3)$;

h) $-3\left(a - \frac{1}{3}\right)(a+7) = (1-3a)(a+7)$;

i) $-2\left(a - \frac{5}{2}\right)(a-4) = (5-2a)(a-4)$.

161. a) $xy(x^2 - y^2) = xy(x+y)(x-y)$; $10(a+3)(a-3)$; $m^3(m+1)(m-1)$;

b) $2(b+1)^2$; $3(c+d)^2$;

c) $(a^2 + 4x^2)(a+2x)(a-2x)$; $(x+y)(x^2 - xy + y^2)(x-y)(x^2 + xy + y^2)$;

d) $(x+y)(x-y+1)$; $(x+y)(x-y-1)$; $(x-y)(x+y-1)$;
 $(x-y)(x+y+1)$;

e) $(c-3-y)(c-3+y)$; $4(b-c+1)(b+c-1)$;

f) $8(a^2 - 5a + 6) = 8(a-3)(a-2)$;

g) $7c(2c+d)(2c-d)$;

h) $x^3(x^4 - 2x^2 + 1) = x^3(x^2 - 1)^2 = x^3(x+1)^2(x-1)^2$;

i) $(a-b)(a-b+c)$;



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

$$j) 1 - (x^2 + 2xy + y^2) = 1 - (x + y)^2 = (1 + x + y)(1 - x - y);$$

$$(2a + b - 1)(2a - b + 1);$$

$$k) x^2(x - y) - y^2(x - y) = (x - y)(x^2 - y^2) = (x - y)^2(x + y);$$

$$l) (5a - 5b + c + d)(5a - 5b - c - d);$$

$$m) (c + 1)(c + 2)(c - 2); \quad (2x + y)(2x - y + 3);$$

$$n) (b - 1)^2(b + 1).$$

$$162. a) (k^2)^3 + (m^2)^3 = (k^2 + m^2)(k^4 - k^2m^2 + m^4);$$

$$b) x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x);$$

$$c) (a^2 + 2)^2 - 4a^2 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a);$$

$$d) c^3 + 6c^2 + 9c + 2c + 6 = c(c^2 + 6c + 9) + 2(c + 3) = c(c + 3)^2 + 2(c + 3) = \\ = (c + 3)[c(c + 3) + 2] = (c + 3)(c^2 + 3c + 2) = (c + 3)(c + 2)(c + 1);$$

$$e) x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x^2 - 2x - 3 = x^2(x^2 - 2x - 3) + (x^2 - 2x - 3) = \\ = (x^2 - 2x - 3)(x^2 + 1) = (x - 3)(x + 1)(x^2 + 1);$$

$$f) b^4 + 2b^3 + b^2 + b^2 + 2b + 1 = b^2(b^2 + 2b + 1) + (b^2 + 2b + 1) = \\ = (b^2 + 2b + 1)(b^2 + 1) = (b + 1)^2(b^2 + 1).$$

163. Az a), b) és d) kifejezések egyenlők.

164. Alakítsa szorzattá a kifejezéseket! A kéttényezős szorzat csak úgy lehet prím, ha az egyik tényező 1, a másik pedig prímszám.

a) $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ lehet prím. Ha $n - 1 = 1$, akkor $n = 2$ és $n + 1 = 3$, amely prím.

b) $n^2 + 3n + 2 = (n + 1)(n + 2)$ lehet prím. Két egymást követő természetes szám szorzata mindig osztható 2-vel, így $(n + 1)(n + 2) = 2$ lehet csak, amely $n = 0$ esetén teljesül.

c) $n^4 - n^2 = n^2(n + 1)(n - 1)$ három különböző szám szorzata, amely nem lehet prím.

d) $n^2 - 2n - 3 = (n - 3)(n + 1)$ lehet prím. Ha $n - 3 = 1$, akkor $n = 4$ és $n + 1 = 5$, amely prím.

e) $n^2 + n - 6 = (n - 2)(n + 3)$ nem lehet prím. Ha $n - 2 = 1$, akkor $n = 3$, de $n + 3 = 6$, amely nem prím.



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

3.3. Algebrai tört kifejezések

165. Egy törtkifejezés nincs értelmezve, ha benne bármely nevező helyettesítési értéke 0.

- a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathbb{R} \setminus \{7\}$; $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{9}{2}\right\}$;
- b) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{2}\right\}$; $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$;
- c) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{R} \setminus \{-6; 6\}$; $\mathbb{R} \setminus \{-11\}$;
- d) $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$; $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$; $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0; 0)\}$;
- e) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$; $\mathbb{R}$;
- f) $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- g) $\mathbb{R} \setminus \{-1; -2; -3\}$;
- h) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$;
- i) $\mathbb{R} \setminus \{5\}$; $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$.

166. Egy törtkifejezés értéke akkor 0, ha a számláló helyettesítési értéke 0 és a nevezőé nem 0.

- a) $x = 3$; a tört értéke nem lehet 0; $x = -\frac{1}{2}$;
- b) $x = 0$ vagy $x = -3$; $x = 3$;
- c) $|x| = 2$; a tört értéke nem lehet 0.

167. A törtkifejezés egyszerűsítésekor a kapott kifejezés értelmezési tartománya megegyezik az eredeti tört értelmezési tartományával, így a határozatlanok azon értékeire nem értelmezhetők a törtek, melyekre az eredeti nevezők értéke 0.

- a) $\frac{a^2}{2b}$; $-\frac{1}{3x}$; $\frac{3}{2a}$; $\frac{9x^2y}{2}$;
- b) $\frac{(x+6)(x-6)}{x-6} = x+6$; $\frac{3(5+y)}{y+5} = 3$; $\frac{c(c+4)}{2c} = \frac{c+4}{2}$;
- c) 7; -8; $\frac{x-6}{2x}$;
- d) $5-x$; $\frac{a-b}{a+b}$; $-a$;
- e) $a-b$; $5c^2+3$;
- f) $3(x+2y)$;
- g) $\frac{a^2+a+3a+3}{a+1} = \frac{a(a+1)+3(a+1)}{a+1} = \frac{(a+1)(a+3)}{a+1} = a+3$; h) x^2+8 .



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

168. a) $\frac{3(x+1)(x-1)}{6(x-1)} = \frac{x+1}{2} \quad x \neq 1; \quad \frac{a(a+1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{a}{a-1} \quad a \neq 1 \text{ és } a \neq -1;$
- b) $\frac{2a}{a+3} \quad a \neq -3; \quad \frac{b+2}{b} \quad b \neq 0 \text{ és } b \neq -2;$
- c) $\frac{5(c+3)}{c-3} \quad c \neq 3; \quad \frac{1}{d-1} \quad d \neq 1;$
- d) $\frac{a(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)} = \frac{a}{a+b} \quad a \neq -b; \quad \frac{1}{2(5m-3k)} \quad m \neq \frac{3}{5}k;$
- e) $\frac{x^2-y^2}{3}; \quad \frac{a^2+1}{a^2-1} \quad a \neq 1 \text{ és } a \neq -1;$
- f) $\frac{x-y}{y} \text{ és } y \neq 0;$
- g) $\frac{4(c-m)-m^2(c-m)}{(m+2)(m-c)} = \frac{(c-m)(4-m^2)}{-(m+2)(c-m)} = \frac{(2-m)(2+m)}{-(m+2)} = m-2$
 $m \neq -2 \text{ és } m \neq c;$
- h) $\frac{b^2(b-1)-(b-1)}{2(b^2-2b+1)} = \frac{(b-1)(b^2-1)}{2(b-1)^2} = \frac{(b-1)(b+1)}{2(b-1)} = \frac{b+1}{2} \quad b \neq 1;$
- i) $\frac{x+y-z}{x+z-y} \quad x+z \neq y \text{ és } x+z \neq -y;$
- j) $\frac{a^2-2a+1-16}{a^2+4a+4-1} = \frac{(a-1)^2-4^2}{(a+2)^2-1^2} = \frac{(a-1+4)(a-1-4)}{(a+2+1)(a+2-1)} = \frac{a-5}{a+1} \quad a \neq -3 \text{ és } a \neq -1.$
169. a) $\frac{15a^2}{2b} \quad b \neq 0; \quad \frac{5y}{9z^3} \quad z \neq 0; \quad \text{b) } \frac{x^2}{3} \quad x \neq 0; \quad \frac{1}{21a^2} \quad a \neq 0;$
- c) $\frac{9b}{5acd^2} \quad a, b, c, d \neq 0; \quad \frac{1}{x} \quad x, y \neq 0; \quad \text{d) } \frac{x^3y}{b^3} \quad b \neq 0;$
- e) $-1 \quad x \neq 1 \text{ és } x \neq -1; \quad \frac{2-y}{y+2} \quad y \neq -2; \quad \text{f) } k \quad k \neq 0, m \neq 0; \quad 4a(1-2a) \quad a \neq 0, a \neq \frac{1}{2}.$
170. a) $\frac{a(a+b)}{b^2} \cdot \frac{2b}{a^2} = \frac{2(a+b)}{ab}; \quad \frac{3(x+4)}{xy} \cdot \frac{y(x-2)}{x+4} = \frac{3(x-2)}{x};$
- b) $\frac{3c(2+3c)}{(2-3c)(2+3c)} \cdot \frac{5(2-3c)}{3c} = 5; \quad \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2} \cdot \frac{x-y}{y(x+y)} = \frac{1}{y};$



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

c) $\frac{a-3}{5a(a-2)}; \frac{2y-x}{x+2y};$

d) $\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)} \cdot \frac{(y+1)^2}{y^2+y+1} = y+1; \quad \frac{3(m+1)(m-1)}{(m+1)^2} \cdot \frac{2(m+1)}{9m} = \frac{2(m-1)}{3m};$

e) $3(b-c); \quad \frac{(a-4)(a-1)}{2a^2};$

f) $a+b; \quad 1.$

171. a) $\frac{x+y}{xy}; \quad \frac{2-a}{a^2}; \quad \frac{m^2+2m+6}{2m^2};$

b) $\frac{xc-yb}{abc}; \quad \frac{4m+4}{6m^2} = \frac{2m+2}{3m^2}; \quad \frac{x^2+y^2}{x^2y^2};$

c) $\frac{1}{b-c}; \quad \frac{x(2x-1)-x(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{-2x}{4x^2-1}; \quad \frac{(a+1)^2-a(a+2)}{a(a+1)} = \frac{1}{a^2+a};$

d) $\frac{x^2-4}{x-2} = x+2;$

$$\frac{(k-3)(k+1)-2k(k-1)}{(k-1)(k+1)} = \frac{k^2-2k-3-2k^2+2k}{k^2-1} = \frac{-k^2-3}{k^2-1} = \frac{k^2+3}{1-k^2}.$$

172. a) $\frac{1}{3(2-y)} + \frac{y}{2-y} = \frac{1+3y}{3(2-y)};$

$$\frac{x+4}{2(x+2)} - \frac{x+6}{3(x+2)} = \frac{3x+12-2x-12}{6(x+2)} = \frac{x}{6(x+2)};$$

b) $\frac{20}{(a-5)(a+5)} + \frac{2}{a+5} = \frac{20+2(a-5)}{(a-5)(a+5)} = \frac{2a+10}{(a-5)(a+5)} = \frac{2(a+5)}{(a-5)(a+5)} = \frac{2}{a-5};$

$$\frac{1}{b+1} + \frac{2}{b-1} - \frac{3}{(b+1)(b-1)} = \frac{b-1+2(b+1)-3}{(b+1)(b-1)} = \frac{3b-2}{b^2-1};$$

c) $\frac{2x}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x(x+1)-2(x-1)}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{2x^2+2}{(x+1)(x-1)^2};$

$$\frac{2a-5}{a(a-1)} + \frac{a-4}{2(a-1)} = \frac{2(2a-5)+a(a-4)}{2a(a-1)} = \frac{a^2-10}{2a(a-1)};$$

d) $\frac{1-3m}{3(m+3)} + \frac{m^2}{(m+3)^2} = \frac{(1-3m)(m+3)+3m^2}{3(m+3)^2} = \frac{3-8m}{3(m+3)^2}; \quad \frac{x^2-6x+9}{3(x+3)^2};$



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

e) $\frac{16a}{(a-2)^2(a+2)};$

f)
$$\frac{5x+1}{(x-1)^2} - \frac{10}{(x-1)(x+1)} - \frac{5x-1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(5x+1)(x+1)^2 - 10(x-1)(x+1) - (5x-1)(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{12(x^2+1)}{(x-1)^2(x+1)^2};$$

g) $\frac{b^2 - 22b + 91}{5b(b-4)(b+4)};$

h) Az $a^3 - b^3$ nevezetes szorzat segítségével közös nevezőre hozva: $\frac{4(x+1)}{x^2+x+1}.$

173. a) $\frac{a^2+b^2}{ba} \cdot ab = a^2+b^2;$ b) $\frac{\frac{k^2-m^2}{mk}}{k-m} = \frac{(k-m)(k+m)}{mk(k-m)} = \frac{k+m}{mk};$

c) $\frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x-1};$ d) $\frac{1+\frac{1}{\frac{y-1}{y}}}{1-\frac{1}{\frac{y+1}{y}}} = \frac{1+\frac{y}{y-1}}{1-\frac{y}{y+1}} = \frac{\frac{y-1+y}{y-1}}{\frac{y+1-y}{y+1}} = \frac{(2y-1)(y+1)}{y-1};$

e) $\frac{2}{x-2}.$

174. a) $\frac{a+5}{(a+4)(a-4)} \cdot \frac{a+5-9}{a+5} = \frac{a-4}{(a+4)(a-4)} = \frac{1}{a+4};$

b) $\frac{4b-2(2b+5)}{2b+5} \cdot \frac{(2b+5)(2b-5)}{5} = \frac{-10(2b-5)}{5} = -2(2b-5) = 10-4b;$

c) $\frac{3}{c};$

d) $\frac{2}{d+4};$

e) $-\frac{2}{3m^2+4m};$

f)
$$\frac{5x+5}{x+3} : \frac{(x-1)(x-3)+2(x+6)-x(x+3)}{2(x+3)(x-3)} = \frac{5x+5}{x+3} \cdot \frac{2(x+3)(x-3)}{-5x+15} =$$

$$= \frac{5(x+1)}{x+3} \cdot \frac{2(x+3)(x-3)}{-5(x-3)} = -2(x+1);$$



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

$$g) \frac{(a+b)(a-b)+b^2}{a-b} \cdot \frac{b-a}{a^2} = \frac{a^2}{a-b} \cdot \frac{-(a-b)}{a^2} = -1;$$

$$h) x + y.$$

$$175. a) \frac{a+1+a-1}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a+1-a+1}{(a-1)(a+1)} = \frac{2a}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{(a+1)(a-1)}{2} = a = 0,73;$$

$$b) \frac{4b+4+b^2}{2b(b+2)} \cdot \frac{2(b+1)}{b+2} - \frac{1}{b} = \frac{(b+2)^2}{2b(b+2)} \cdot \frac{2(b+1)}{b+2} - \frac{1}{b} = \frac{b+1}{b} - \frac{1}{b} = \frac{b}{b} = 1;$$

$$c) \frac{(x+y)^2 - 2(x+y)(x-y) + (x-y)^2}{(x+y)^2(x-y)^2} \cdot \frac{x^4 + y^4 - 2x^2y^2}{y^2} =$$

$$= \frac{4y^2}{(x+y)^2(x-y)^2} \cdot \frac{(x^2 - y^2)^2}{y^2} = 4;$$

$$d) \frac{1}{x+y} = \frac{1}{0,4+0,6} = 1.$$

$$176. a) 1; 10; \frac{1}{8}; 11; 0; \frac{7}{9};$$

$$b) |a|; x^4; 2|y^3|; 3b^2; \frac{m^6}{6}; \frac{4|a^3|}{7b^2}.$$

3.4. Négyzetgyökvonás

177. A szoba 6 m × 6 m-es.

178. Írja fel a Pitagorasz-tételt! A befogó 12 cm.

179. Az átfogó hossza $\frac{10}{7}$ egység.

$$180. a) 3 + 1 = 4; \sqrt{10};$$

$$c) 8 - 7 = 1; \sqrt{15};$$

$$e) \frac{6}{3} = 2; \sqrt{4} = 2;$$

$$g) 10 + 2 = 12; \sqrt{104};$$

$$b) 4 \cdot 2 = 8; \sqrt{64} = 8;$$

$$d) 5 \cdot 2 = 10; \sqrt{100} = 10;$$

$$f) \sqrt{9} = 3; \frac{12}{4} = 3;$$

$$h) 3^2 = 9; 9;$$



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

i) $8; 2^3 = 8.$

Bármely két nemnegatív szám szorzatának, illetve hányadosának négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének szorzatával, illetve hányadosával.

181. Alkalmazza a gyökvonás azonosságait!

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9;$

b) A két tag nem vonható össze!;

c) $\sqrt{7^4} = 7^2 = 49;$

d) $\sqrt{\frac{54}{6}} = \sqrt{9} = 3;$

e) $\sqrt{2 \cdot 6 \cdot 12} = \sqrt{12^2} = 12;$

f) 10;

g) $5^3 = 125;$

h) $\sqrt{36} + 3 = 9;$

i) $\sqrt{5} + \sqrt{3};$

j) $\sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1;$

k) $\frac{\sqrt{14 \cdot 7} + \sqrt{56 \cdot 7}}{\sqrt{2}} = \sqrt{7^2} + \sqrt{28 \cdot 7} = 7 + 14 = 21.$

182. a) $\sqrt{8 \cdot 3} = \sqrt{24}$ és $\sqrt{\frac{48}{2}} = \sqrt{24}$, ezért $\sqrt{8} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{2}};$

b) $\sqrt{2} + \sqrt{16} = \sqrt{2} + 4$ és $\sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$, mivel $\sqrt{2} > 1$,

ezért $\sqrt{2} + \sqrt{16} > \sqrt{\frac{75}{3}};$

c) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2^4}} = \sqrt{\frac{2^5}{2^4}} = \sqrt{2}$ és $\frac{\sqrt{3^5}}{\sqrt{81}} = \sqrt{\frac{3^5}{3^4}} = \sqrt{3}$, ezért $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2^4}} < \frac{\sqrt{3^5}}{\sqrt{81}};$

d) $(\sqrt{5})^3 = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$ és $\sqrt{6} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{120}$, ezért $(\sqrt{5})^3 > \sqrt{6} \cdot \sqrt{20};$

e) $\sqrt{\frac{45 \cdot 8}{14 \cdot 35}} = \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$ és $\sqrt{\frac{32 \cdot 20}{54 \cdot 15}} = \sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{8}{9}$, ezért $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{35}} < \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{54}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}}.$

183. a) $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 3 - 1 = 2;$

b) $3 \cdot 2 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 4 = 2 + \sqrt{2};$

c) $18 + 2 \cdot \sqrt{18} \cdot 3\sqrt{2} + 9 \cdot 2 = 36 + 6\sqrt{36} = 72$ vagy $(3\sqrt{2} + 3\sqrt{2})^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72;$

d) $(\sqrt{5})^2 - (4\sqrt{2})^2 = 5 - 32 = -27;$

e) $51 - 12\sqrt{18};$



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

$$\text{f) } (\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2 \sqrt{2} + 3\sqrt{3}(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 = 3\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 9\sqrt{3} + 11\sqrt{2};$$

$$\text{g) } 58\sqrt{5} - 63\sqrt{3};$$

$$\text{h) } \sqrt{(7 - \sqrt{24})(7 + \sqrt{24})} = \sqrt{49 - 24} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\text{i) } 3;$$

$$\text{j) } 8 - \sqrt{15} + 2\sqrt{8 - \sqrt{15}} \cdot \sqrt{8 + \sqrt{15}} + 8 + \sqrt{15} = 16 + 2\sqrt{8^2 - (\sqrt{15})^2} = 16 + 2\sqrt{64 - 15} = 16 + 2\sqrt{49} = 16 + 14 = 30;$$

$$\text{k) } 2\sqrt{20} - 2\sqrt{10};$$

$$\text{l) Legyen } a = \sqrt{6 - \sqrt{11}} + \sqrt{6 + \sqrt{11}} > 0! \text{ Határozza meg } a^2 \text{ értékét!}$$

$$a^2 = 6 - \sqrt{11} + 2\sqrt{6 - \sqrt{11}}\sqrt{6 + \sqrt{11}} + 6 + \sqrt{11} = 12 + 2\sqrt{36 - 11} = 22,$$

$$\text{ezért } \sqrt{6 - \sqrt{11}} + \sqrt{6 + \sqrt{11}} = \sqrt{22};$$

$$\text{m) } \sqrt{8 - 4\sqrt{2} + 1} - \sqrt{8 + 4\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(2\sqrt{2} - 1)^2} - \sqrt{(2\sqrt{2} + 1)^2} = 2\sqrt{2} - 1 - (2\sqrt{2} + 1) = -2.$$

$$\mathbf{184. a) } 2\sqrt{3}; \quad 4\sqrt{2}; \quad 3\sqrt{3}; \quad 6\sqrt{2}; \quad 10\sqrt{3}; \quad 5\sqrt{2}; \quad 7\sqrt{2};$$

$$\text{b) } 6\sqrt{\frac{1}{5}}; \quad \frac{\sqrt{7}}{9}; \quad \frac{3}{10}\sqrt{\frac{3}{10}}; \quad \frac{9}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}; \quad \frac{2\sqrt{2}}{7};$$

$$\text{c) } a\sqrt{a}; \quad a \geq 0; \quad 2b^2\sqrt{2}; \quad b \in \mathbb{R}; \quad 3x^2\sqrt{2xy} \quad x \geq 0 \text{ és } y \geq 0, \text{ vagy } x \leq 0 \text{ és } y \leq 0;$$

$$5(a-b)\sqrt{3(a-b)} \quad a \geq b; \quad 3c^5\sqrt{5c} \quad c \geq 0.$$

$$\mathbf{185. a) } \sqrt{18}; \quad \sqrt{48}; \quad \sqrt{28}; \quad \sqrt{50}; \quad \sqrt{108};$$

$$\text{b) } \sqrt{2}; \quad \sqrt{\frac{1}{3}}; \quad \sqrt{\frac{2}{5}}; \quad \sqrt{\frac{7}{9}};$$

$$\text{c) } \sqrt{x^3} \quad x \geq 0; \quad \sqrt{a^7} \quad a \geq 0; \quad \sqrt{x^2 y^3} \quad y \geq 0;$$

$$\sqrt{8b^7} \quad b \geq 0; \quad \sqrt{3(x-y)^3} \quad x \geq y.$$

$$\mathbf{186. a) } 2\sqrt{5} = \sqrt{20} < \sqrt{21};$$

$$\text{b) } \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{12}{30}} > \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{5}{30}};$$



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

$$c) \left(3 - \sqrt{2}\right)^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - \sqrt{72} > 10 - \sqrt{72};$$

$$d) 2\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{20}}{3} < \frac{\sqrt{24}}{3}.$$

187. a) $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 0;$

b) $6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -\sqrt{3};$

$$c) \sqrt{\frac{9 \cdot 2}{4}} + \sqrt{\frac{25 \cdot 2}{4}} - \sqrt{4 \cdot 2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2};$$

$$d) (4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5})\sqrt{5} = 5\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 25;$$

$$e) \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{27}{2} \cdot \frac{3}{2}} - \sqrt{6 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} - 3 = 3;$$

$$f) (\sqrt{18} - \sqrt{28})(\sqrt{18} + \sqrt{28}) = 18 - 28 = -10;$$

$$g) (\sqrt{3} - \sqrt{6})(2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 3\sqrt{3}) = (\sqrt{3} - \sqrt{6})(4\sqrt{6} - 3\sqrt{3}) = \\ = 4\sqrt{18} - 9 - 4 \cdot 6 + 3\sqrt{18} = 7\sqrt{18} - 33 = 21\sqrt{2} - 33;$$

h) $10\sqrt{2};$

i) $-4.$

188. A gyökjel alatti kifejezést írjuk fel teljes négyzetként, majd végezzük el a gyökkvonást!

$$a) \sqrt{25 - 10\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(5 - \sqrt{3})^2} = 5 - \sqrt{3};$$

$$b) \sqrt{49 + 2 \cdot 7 \cdot 2\sqrt{5} + 20} = \sqrt{(7 + 2\sqrt{5})^2} = 7 + 2\sqrt{5};$$

$$c) \sqrt{7 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot 2 + 4} = \sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2} = \sqrt{7} - 2.$$

189. a) $\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}; \quad \frac{4\sqrt{7}}{7};$

b) $2\sqrt{2}; \quad 2\sqrt{3};$

$$c) \frac{20}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{15} = \frac{4\sqrt{5}}{3}; \quad \frac{18}{5\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{18\sqrt{6}}{30} = \frac{3\sqrt{6}}{5};$$

$$d) \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} = \sqrt{5} + \sqrt{3};$$



3. ALGEBRA – MEGOLDÁSOK

$$\frac{10}{\sqrt{6}+1} \cdot \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}-1} = \frac{10(\sqrt{6}-1)}{6-1} = 2(\sqrt{6}-1);$$

e) $3(2\sqrt{7} + \sqrt{17}); \quad 2(4\sqrt{3} + 3\sqrt{5});$

f) $15 + 2\sqrt{56}; \quad 11 - \sqrt{120};$

$$\begin{aligned} \text{g) } \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - 2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{6 + 2\sqrt{15}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{15} + 3} \cdot \frac{\sqrt{15} - 3}{\sqrt{15} - 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{15} - 3)}{15 - 9} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{30} - 3\sqrt{2}}{12}. \end{aligned}$$

190. a) $\frac{\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5}{10\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}};$

b) $\frac{\sqrt{15} + \sqrt{6}}{9} \cdot \frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{15} - \sqrt{6}} = \frac{15 - 6}{9(\sqrt{15} - \sqrt{6})} = \frac{1}{\sqrt{15} - \sqrt{6}};$

c) $\frac{1}{5 + \sqrt{21}}.$

191. A nevezők gyöktelenítése után a kifejezések összehasonlíthatóak.

a) $\frac{8}{\sqrt{14} + \sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{14} - \sqrt{6}}{\sqrt{14} - \sqrt{6}} = \sqrt{14} - \sqrt{6} > \frac{6}{\sqrt{13} + \sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{13} - \sqrt{7}}{\sqrt{13} - \sqrt{7}} = \sqrt{13} - \sqrt{7}.$

b) A bal oldali szám negatív, a jobb oldali pedig pozitív, így az utóbbi a nagyobb.

192. a) $\frac{\sqrt{5} + 2 - (\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{4}{5 - 4} = 4;$

b) $\frac{5(2\sqrt{3} - \sqrt{7})}{12 - 7} + \frac{2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{28 - 27} = 2\sqrt{3} - \sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} = \sqrt{7} - \sqrt{3}.$

c) A két nevező szorzatát választva közös nevezőnek, továbbá

felhasználva, hogy $4 \pm 2\sqrt{3} = (1 \pm \sqrt{3})^2$, illetve $2 \pm \sqrt{3} = \frac{(1 \pm \sqrt{3})^2}{2},$

$$\frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{6} - \sqrt{3}\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{6} - \sqrt{3}\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 3}} =$$



$$= \frac{4\sqrt{2} + 2 \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \sqrt{3} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}{2+1+\sqrt{3}-(\sqrt{3}-1)-1} = \dots = \sqrt{2}.$$

- 193.** Indirekt módon bizonyítjuk be az állítást. Tegyük fel, hogy a $\sqrt{5}$ racionális szám! Ekkor felírható két pozitív egész szám hányadosaként, amelyek legnagyobb közös osztója az 1.

$$\sqrt{5} = \frac{p}{q} \Rightarrow 5 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 5q^2 = p^2. \text{ Az } 5q^2 \text{ osztható } 5\text{-tel, így } p \text{ is osztható vele.}$$

Legyen $p = 5k$, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$! Ezzel $5q^2 = 25k^2 \Rightarrow q^2 = 5k^2$. Ebből következik, hogy q is osztható 5-tel. Így azonban p és q legnagyobb közös osztója legalább 5, azaz nem relatív prímek. Ellentmondásra jutottunk, az állítást bebizonyítottuk.

- 194.** Végezzük el a kijelölt műveleteket, és használjuk fel, hogy $\sqrt{n}$ csak akkor egész szám, ha n négyzetszám!

a) $\sqrt{9+4\sqrt{5}} \cdot \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})} = \sqrt{81-16 \cdot 5} = \sqrt{1} = 1$, racionális szám;

b) $\sqrt{2\sqrt{7}-3} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{7}} = \sqrt{28-9} = \sqrt{21}$, irracionális szám;

c) $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4} = \frac{\sqrt{2}(3\sqrt{2}+4)}{(3\sqrt{2})^2-4^2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3+2\sqrt{2}$, irracionális szám;

d) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}{5-2} = \frac{14}{3}$, racionális szám;

e) $\sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+2)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = \sqrt{5}+2 - (\sqrt{5}-2) = 4$, racionális szám.



4. Számelmélet – megoldások

4.1. Bevezetés a számelméletbe

195. a) 132; 225; 1 234 567 890; $10^{100} - 1$; $6!$;

b) 132; 2008; 2^{2007} ; $6!$;

c) 225; 1 234 567 890; $6!$;

d) 132; 1 234 567 890; $6!$;

e) 2008; 2^{2007} ; $6!$;

f) 225; 1 234 567 890; $10^{100} - 1$; $6!$;

g) 132; $10^{100} - 1$.

196. Két egymást követő természetes szám közül az egyik biztosan páros, így a szorzat is az.

197. Legyen a kisebbik szám $n!$ Ekkor az összeg $n + (n + 1) = 2n + 1$, ami páratlan.

198. Az egymást követő számok közül...

a) az egyik szám biztosan osztható 3-mal;

b) az egyik szám biztosan osztható 3-mal, és legalább az egyik páros, ezért a szorzatuk osztható 6-tal.

199. Igaz állítások: a), c), d).

200. Igaz állítások: a), c), d).

201. a) Igaz, mert a szám számjegyeinek összege osztható 3-mal.

b) Igaz, mert a különbség utolsó két számjegyéből álló szám 56, ami osztható 4-gyel.

c) Hamis, mert az első tag nem osztható 6-tal, de a második tag igen.

d) Igaz, mert a kivonás elvégzése után kapott (10 db 9-es számjegyből álló) szám osztható 9-cel.

e) Hamis, mert a kivonás elvégzése után kapott (2007 db 9-es és 1 db 5-ös számjegyből álló) szám nem osztható 3-mal, és így 15-tel sem.



4. SZÁMELMÉLET – MEGOLDÁSOK

- f) Igaz, mert az összeg minden tagja 1-re végződik, így az 5 tag összege 5-re végződik.
 g) Hamis, mert a szorzatnak csak 3 db 5-tel osztható tényezője van, így csak 10^3 -al osztható.

202. Alakítsuk a kifejezéseket szorzattá!

- a) $10^4 - 7^4 = (10^2 + 7^2)(10^2 - 7^2) = (10^2 + 7^2)(10 + 7)(10 - 7) = 3 \cdot 17 \cdot 149$;
 b) $888^3 - 800^3 = (888 - 800)(888^2 + 888 \cdot 800 + 800^2) = 88(888^2 + 888 \cdot 800 + 800^2)$;
 c) $29^5 + 1 = (29 + 1)(29^4 - 29^3 + 29^2 - 29 + 1)$, ami osztható 30-cal.

203. Alakítsuk a kifejezéseket szorzattá!

- a) $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$ három egymást követő természetes szám szorzata, ami osztható 3-mal.
 b) $n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 4)(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2)$ öt egymást követő egész szám szorzata, ami osztható 5-tel.
 c) Öt egymást követő egész szám közül egy osztható 2-vel, egy 3-mal, egy 4-gyel és egy 5-tel. Így az öt szám szorzata osztható $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ -szal.

204. Az előző gondolatmenet alapján:

- a) $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ -gyel;
 b) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ -szal;
 c) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ -szal.

205. $(2k + 1)^2 - (2k - 1)^2 = (4k^2 + 4k + 1) - (4k^2 - 4k + 1) = 8k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

206. Bontsa fel az osztókat egymáshoz relatív prím tényezőkre, és külön vizsgálja az oszthatóság feltételeit!

- a) $6 \mid 135x$, ha $2 \mid x$ és $3 \mid 1 + 3 + 5 + x$, amiből $x = 0$ vagy $x = 6$;
 b) $15 \mid 2x4y$, ha $y = 0$, vagy $y = 5$ és $3 \mid 2 + x + 4 + y$;
 $y = 0$ esetén $3 \mid 6 + x$, így $x = 0$, vagy $x = 3$; vagy $x = 9$;
 $y = 5$ esetén $3 \mid 11 + x$, így $x = 1$, vagy $x = 4$; vagy $x = 7$;
 c) $36 \mid 19x19y$, ha $4 \mid 9y$ és $9 \mid 20 + y + x$;
 $y = 2$ esetén $9 \mid 22 + x$, így $x = 5$ és $y = 6$ esetén $9 \mid 26 + x$, így $x = 1$;



4. SZÁMELMÉLET – MEGOLDÁSOK

- d) $45 \mid x2025y$, ha $y = 0$, vagy $y = 5$ és $9 \mid 9 + x + y$;
 $y = 0$ esetén $9 \mid x$, így $x = 9$ és $y = 5$ esetén $9 \mid 5 + x$, így $x = 4$.
- 207.** Az előző feladat gondolatmenetét használva:
 a) 65 430 és 65 436; b) 65 436; c) 65 430.
- 208.** a) Az x tetszőleges egyjegyű természetes szám, y pedig bármely páratlan egyjegyű természetes szám lehet, így 50 megfelelő szám van (809 512, 809 532, ..., 899 592).
 b) 829 512; 809 532; 899 532; 879 552; 859 572; 839 592;
 c) 809 592; 819 552; 829 512; 839 592; 849 552; 859 512; 869 592; 879 552; 889 512; 899 592.
- 209.** A keresett háromjegyű szám osztható 5-tel és 9-cel is. Az utolsó számjegy csak 0, vagy 5 lehet. Ha 0-ra végződik a szám, akkor az első két jegy összege 9. Kilenc megfelelő számpár van: (1; 8), (2; 7), ..., (9; 0). Ha 5-re végződik a szám, akkor az első két jegy összege 4. Ennek 4 számpár felel meg: (1; 3), (2; 2), (3; 1) és (4; 0). Összesen tehát 13 megfelelő háromjegyű szám van.
- 210.** Bontsuk fel a kifejezéseket olyan tagokra, amelyek oszthatóak a megadott számmal!
 a) $16a + 9b = 8(2a + 3b) - 15b$, ahol az első tag a feltétel szerint osztható 5-tel;
 b) $19 + b = (2a + b) + 17a$;
 c) $10a + 20b = 2(5a - 3b) + 26b$;
 d) $33a + 48b = 5(4a + 7b) + 13(a + b)$.
- 211.** $(8a + b) - 3(3a - 2b) = 7b - a$, ahol a különbség mindkét tagja osztható 17-tel.
- 212.** Igaz állítások: a), c), d), e).
- 213.** Egy 0-ra végződik, mert a prímszámok között csak egy 2-vel és egy 5-tel osztható szám van.
- 214.** Az első 50 pozitív egész szám között 16 db 3-mal, 5 db 9-cel és 1 db 27-tel osztható szám van, ezért a szorzatuk prímtenyezős felbontásában pontosan 22 db 3-as prímtenyező szerepel. Így a szorzat legfeljebb 3^{22} -nel osztható.



4. SZÁMELMÉLET – MEGOLDÁSOK

- 215.** Elég összeszámolni az 5-ös szorzótényezőket, mivel 2-esből biztosan több van a szorzatban. 100-ig 20 db 5-tel és 4 db 25-tel osztható szám van, így $100!$ legfeljebb 10^{24} -nel osztható, azaz 24 db 0-ra végződik.
- 216.** $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$; $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$; $888 = 2^3 \cdot 3 \cdot 37$; $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$;
 $2025 = 3^4 \cdot 5^2$; $1\,000\,000 = 2^6 \cdot 5^6$.
- 217.** Azok a természetes számok négyzetszámok, amelyeknek a prímtényező felbontásában szereplő összes hatványkitevő páros. A számokat felbontva prímtényezőkre adódik, hogy a 91 125 kivételével mindegyik négyzetszám.
- 218.** Az előző feladatban leírtak alapján:
a) 2-vel;
b) 33-mal kell szorozni.
- 219.** Az osztók növekvő sorrendben:
a) 1; 2; 3; 4; 6; 12; b) 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36; c) 1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100.
- 220.** $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, osztói: $2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0$; $2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0$; $2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0$; $2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1$; $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0$;
 $2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1$; $2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1$; $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$; $2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0$; $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0$; $2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1$; $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.
- 221.** Az osztók száma a prímtényező felbontás segítségével határozható meg. Egy $A = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$ szám osztóinak száma $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_n + 1)$.
a) $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, amiből az osztók száma: $d(2520) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$;
b) $d(825) = d(3 \cdot 5^2 \cdot 11) = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$;
c) $d(91125) = 28$.
- 222.** a) Mivel a 7-nek csak egyféle szorzatalakja van $(7 \cdot 1)$ és a legkisebb számot keressük, ezért a legkisebb prímtényező (2) kitevője 6, a többié 0, azaz a keresett szám a $2^6 = 64$. (Lásd a 221. feladat megoldását!)
b) Az a)-hoz hasonló gondolatmenettel a keresett szám: $2^4 \cdot 3 = 48$.
- 223.** Mivel $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 > 100$, ezért a kétjegyű számoknak legfeljebb 3 különböző prímtényezője lehet. $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ -nak 12 osztója van. Két prímtényező esetén $2^3 \cdot 3^2 = 72$ -nek szintén 12 osztója van. Egy prím esetén $2^6 = 64$ -nek csak 7 osztója van. Így a 60-nak és a 72-nek van a legtöbb osztója.



4. SZÁMELMÉLET – MEGOLDÁSOK

224. $\frac{3n+10}{n+1} = 3 + \frac{7}{n+1}$. A kifejezés értéke akkor lesz egész, ha $n+1$ osztója a 7-nek.

Ebből $n = 0$; $n = 6$; $n = -2$ és $n = -8$.

225. $\frac{10n+21}{2n-3} = 5 + \frac{36}{2n-3}$ miatt elegendő a 36 osztóit vizsgálni.

a) A feltétel miatt n lehetséges értékei: 2; 3; 6; 1; 0; -3.

b) A feltétel miatt n lehetséges értékei: 2; 3; 6; -3.

226. (A 6-nak az 1-nél nagyobb kitevőjű hatványai oszthatók 3-mal, 4-gyel, 9-cel, és mindig 6-osra végződnek.)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
3-as osztási maradék	2	1	0	1	2	1
4-es osztási maradék	3	0	1	0	3	2
5-ös osztási maradék	2	3	1	0	0	4
9-es osztási maradék	5	1	3	1	8	7

Pl.: a) $347 = 3 \cdot 115 + 2 = 4 \cdot 86 + 3 = 5 \cdot 69 + 2 = 9 \cdot 38 + 5$.

227. a) hamis; b) hamis (7-féle lehet); c) hamis; d) igaz; e) hamis.

228. $(n-1) + n + (n+1) = 3n$ kifejezés osztható 3-mal $(n \in \mathbb{N}^+)$.

229. Legyen a két szám $7k+2$ és $7m+5$, ahol $k, m \in \mathbb{N}$!

a) $7k+2+7m+5 = 7(k+m+1)$, azaz 0 a maradék;

b) $(7k+2)(7m+5) = 49km + 35k + 14m + 10 = 7(7km + 5k + 2m + 1) + 3$, azaz 3 a maradék;

c) 4; d) 4.

230. Legyen $n = 5a + 2$ és $k = 5b + 3$, ahol $a, b \in \mathbb{N}$! Az előző feladathoz hasonlóan:

a) 0;

b) 4;

c) 4;

d) 1;

e) $n^2 + k^2 = \dots = 5(5a^2 + 5b^2 + 4a + 6b + 2) + 3$, azaz 3 a maradék;

f) 0.



4. SZÁMELMÉLET – MEGOLDÁSOK

231. Az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 20$ szorzat ...

- a) osztható 21-gyel, mert tartalmaz 3-as és 7-es prímtényezőt is, így a maradék 0;
- b) osztható 1001-gyel, mert $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, és a szorzatban mindhárom tényező előfordul, tehát a maradék 0;
- c) osztható 10000-rel, mert $10000 = 2^4 \cdot 5^4$, és a szorzatban az 5-ös, 10-es, 15-ös és 20-as tényező összesen 4 db 5-ös prímtényezőt tartalmaz, valamint $2^4 = 16$ is szerepel a szorzatban, így a maradék 0.

232. Ha $p = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^+$) alakú, akkor $p + 26 = 3k + 1 + 26 = 3(k + 9)$ nem prím, ha pedig $p = 3k + 2$ alakú, akkor $p + 64 = 3(k + 22)$ nem prím, így p csak $3k$ alakú lehet. Mivel azonban p prím, ezért a $p = 3$ az egyetlen lehetséges megoldás.

233. a) $4p^2 - 1 = (2p - 1)(2p + 1)$ kifejezés egyetlen esetben lehet prím, ha a kisebbik tényezője 1, azaz $p = 1$, mivel az 1 nem prím, így a kifejezés nem prím.

- b) Ha p nem osztható 3-mal ($3k \pm 1$ alakú), akkor az első tag 3-mal osztva 2 maradékot ad, így a kifejezés osztható 3-mal és nem 3, azaz nem prím. Így csak $p = 3$ lehetséges, és ekkor a kifejezés értéke 43, ami prím.

234. Jelölje p , q és r a keresett prímeket! Mivel $p \cdot q \cdot r = 7 \cdot (p + q + r)$, ezért p , q és r közül az egyik, pl. $p = 7$. Így az állítás leegyszerűsödik: $q \cdot r = 7 + q + r$. Kifejezve az egyenletről q -t: $q = \frac{7+r}{r-1}$. Átalakítva a kifejezést $q = 1 + \frac{8}{r-1}$, mely csak akkor ad egész megoldást q -ra, ha $(r-1) \mid 8$. Végigpróbálgatva az eseteket adódik, hogy $q = 5$ és $r = 3$.

235. A számok prímtényezős felbontásaiból meghatározható:

- a) $(24; 54) = 2 \cdot 3 = 6$; b) $(210; 165) = 15$;
- c) $(765; 2002) = 1$; d) $(450; 825; 1125) = 3 \cdot 5^2 = 75$;
- e) $27^7 = 3^{21}$ és $9^{10} = 3^{20}$, így $(3^{21}; 3^{20}) = 3^{20}$;
- f) $(10^5; 21^3) = 1$;
- g) a 23 prím, így $(23; 89) = 1$.

236. A törtet a számláló és a nevező legnagyobb közös osztójával egyszerűsítve (az előző feladat eredményeit felhasználhatjuk):

- a) $\frac{4}{9}$; b) $\frac{11}{14}$; c) $\frac{9}{11}$; d) $\frac{39}{100}$.



4. SZÁMELMÉLET – MEGOLDÁSOK

237. A számok prímtényezős felbontásaiból meghatározható:

- a) $[36; 45] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$;
- b) $[140; 56] = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 = 280$;
- c) a 19 és 29 relatív prímek, ezért $[19; 29] = 19 \cdot 29 = 551$;
- d) a 18 és 25 relatív prímek, ezért $[18; 25] = 18 \cdot 25 = 450$;
- e) $[100; 120; 150] = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600$;
- f) $8^5 = 2^{15}$ és $4^7 = 2^{14}$, így $[2^{15}; 2^{14}] = 2^{15}$.

238. A törtek összevonásakor a törteket közös nevezőre hozzuk, ami a nevezők legkisebb közös többszöröse (felhasználhatjuk az előző feladat eredményeit):

$$\text{a) } \frac{5+4}{180} = \frac{1}{20}; \quad \text{b) } \frac{22-15}{280} = \frac{1}{40}; \quad \text{c) } \frac{54-85+44}{600} = \frac{13}{600}.$$

239. Két szomszédos természetes számnak a 2 nem lehet közös osztója, hiszen különböző paritásúak. A 3 sem lehet közös osztójuk, mert a számsorban csak minden harmadik szám osztható 3-mal, és így tovább... Tehát csak az 1 a közös osztójuk.

240. a) pl.: 6, 10 és 15;

b) pl.: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$; $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$; $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ és $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.

241. A keresett számot n -nel jelölve a feltételekből következik, hogy $n-1$ osztható 5-tel, 6-tal és 7-tel is. Mivel a legkisebb ilyen számot keressük, ezért $n-1$ az 5, a 6 és a 7 legkisebb közös többszöröse, azaz 210. Így a keresett szám a 211.

242. Az előző feladathoz hasonlóan gondolkodva; és figyelembe véve, hogy négyjegyűnek kell lenniük, a keresett számok: 2646; 5286 és 7926.

243. A keresett számot n -nel jelölve a feltételekből következik, hogy $n+1$ osztható 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal is. Mivel a legkisebb ilyen számot keressük, ezért $n+1$ a 3, a 4, az 5 és a 6 legkisebb közös többszöröse, azaz 60. Így a keresett szám az 59.

244. A legközelebbi együttállásig eltelt idő a 160-nak, a 200-nak és a 240-nak a legkisebb közös többszöröse, azaz 2400. Legközelebb tehát 2400 nap ($\approx 6,5$ év) múlva lesz együttállás.

245. Annyiféle menetoszlop hozható létre, ahányféleképpen a 72 felbontható 2 pozitív (1-től különböző) egész szám szorzatára. Ez éppen egyenlő a 72 1-től különböző



4. SZÁMELMÉLET – MEGOLDÁSOK

valódi osztói számának a felével (hiszen a 72 nem négyzetszám, tehát csak két különböző tényezőre bontható). A 72 prímtényezős felbontásából kiszámítható, hogy összesen 12 osztója van, melyből 10 1-től különböző valódi osztó. Tehát 5 különböző menetoszlop alakítható ki.

246. A csapatok száma lehet:

- a) 6, összetételük: 7 első, 12 második és 15 harmadikos;
 - b) 3, összetételük: 14 első, 24 második és 30 harmadikos;
 - c) 2, összetételük: 21 első, 36 második és 45 harmadikos.
- (Egy csapatnak nincs értelme.)

247. A könyvek számát k -val jelölve a feltételek szerint $k-3$ osztható 15-tel, 20-szal és 25-tel is, azaz $k-3$ ezek közös többszöröse. Mivel $400 < k < 750$, ezért $k-3 = 600$, tehát 603 könyve van Gergőnek.

248. A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös definícióját, valamint a számok prímtényezős felbontásait felhasználva:

- a) $[a; 2^2 \cdot 3] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow a = 5, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5, 4 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, azaz a lehetséges értékei: 5, 10, 15, 20, 30, 60;
- b) az előzőhöz hasonlóan b lehetséges értékei: 7, 35, 175;
- c) $[3^9; 3^8; c] = 3^{11} \Rightarrow c = 3^{11}$;
- d) $(a; 2^3 \cdot 3^2) = 2^3 \cdot 3 \Rightarrow a = 2^3 \cdot 3 = 24$ vagy ennek bármely olyan egész számszorosa, mely nem tartalmaz 3-as prímtényezőt;
- e) az előzőhöz hasonlóan b lehetséges értékei: 45 vagy ennek bármely olyan egész számszorosa, mely nem tartalmaz 2-es, illetve 3-as prímtényezőt;
- f) $(2^{20} \cdot 5^{20}; 2^{20} \cdot 5^5; c) = 2^5 \cdot 5^5 \Rightarrow c = 10^5$ vagy ennek bármely páratlan számszorosa.

249. a) $(a; b) = 13$ miatt $a = 13k$ és $b = 13m$ ($k, m \in \mathbb{N}^+$), ahol k és m relatív prímelek. Mivel $a + b = 156$, azaz $13(k + m) = 13 \cdot 12 \Rightarrow k + m = 12$, ezért $k = 1$ és $m = 11$, vagy $k = 5$ és $m = 7$.

Ennek megfelelően $a = 13$ és $b = 143$ vagy $a = 65$ és $b = 91$.

b) Hasonlóan az előzőhöz:

$a = 8$ és $b = 160$, vagy $a = 32$ és $b = 40$.

c) $(a; b) = 15$ miatt $a = 15k$ és $b = 15m$ ($k, m \in \mathbb{N}^+$), ahol k és m relatív prímelek.

Mivel $[a; b] = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, ezért k és m közül pontosan az egyiknek tartalmaznia kell 1 db 2-es, 1 db 3-as, illetve 1 db 5-ös prímtényezőt. A lehetséges variációk:



4. SZÁMELMÉLET – MEGOLDÁSOK

a	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$	$2 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2 \cdot 3 \cdot 5$
b	$3 \cdot 5$	$3^2 \cdot 5$	$3 \cdot 5^2$	$3^2 \cdot 5^2$

Az a és b szerepe felcserélhető, tehát a négy lehetséges megoldás:

$(450; 15)$; $(150; 45)$; $(90; 75)$; $(30; 225)$.

250. Határozzuk meg a valódi osztók összegét! A b) 28 és a c) 496 tökéletes szám, az a) 12 és a d) 2016 nem az.

251. a) Az 56 valódi osztóinak összege: $1 + 2 + 4 + 7 + 8 + 14 + 28 = 64$. A 64 valódi osztóinak összege pedig $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$. Így ezek nem barátságos számok;
b) A 220 és a 284 barátságos számpár; c) Az 1210 is az, a párja az 1184; d) Az 1848 és a 3912 nem barátságos számpár.

252. a) A $2^n - 1$ értéke rendre: 1; 3; 7; 15; 31; 63; 127; 255; 511; 1023. Ezek közül az $n = 2; 3; 5; 7$ esetben kapunk prímszámot. b) Az $n = 1; 2; 3; \dots; 10$ esetekben a $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ tökéletes szám lesz.

253. A $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ csak akkor tökéletes szám, ha $2^n - 1$ prím. Az első tényező 2^{n-1} a 2 hatványa, amelynek az utolsó számjegyei rendre 2; 4; 8; 6. Az eseteknek megfelelően $2^n - 1$ utolsó számjegyei rendre 3; 7; 1; 5. Mivel egy prímszám nem végződik 5-re, ezért csak az első három eset lehetséges. Ekkor a szorzat utolsó számjegyei rendre 6; 8; 6. Azaz a feladatban szereplő tökéletes számok 6-ra, vagy 8-ra végződnek.

$$\mathbf{254.} \quad 0,1\dot{6}5 = \frac{165}{1000} = \frac{33}{200}$$

Legyen $x = 1,6\dot{5}$! Ekkor $10x = 16,6\dot{5}$. Kivonva a nagyobbikból a kisebb számot

$$9x = 15, \text{ azaz } x = 1,6\dot{5} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$

A harmadik tört esetén 10-zel, illetve 100-zal szorozzuk a törtet. Kapjuk, hogy

$$90x = 227, \text{ amiből } x = 2,5\dot{2} = \frac{227}{90}.$$

$$\text{A többi tört esetén hasonlóan járunk el. } 0,1\dot{2} = \frac{4}{33}; 3,30\dot{3} = \frac{1100}{333}; 0,98\dot{7}6\dot{5} = \frac{10963}{11100}.$$

255. $x = 0$ esetén $0,1 = \frac{1}{10}$; $x = 9$ esetén $0,1\dot{9} = 0,2$; a többi esetben az előző feladat megoldása szerint eljárva kapjuk, hogy $0,1\dot{2} = \frac{11}{90}$; $0,1\dot{3} = \frac{12}{90} = \frac{4}{30}$; $0,1\dot{4} = \frac{13}{90}$; ...;
 $0,1\dot{8} = \frac{17}{90}.$



4. SZÁMELMÉLET – MEGOLDÁSOK

256. Mivel $0,201\dot{6} = \frac{1815}{9000}$ és $0,201\dot{7} = \frac{1816}{9000}$,
 ezért $\frac{1815}{9000} = \frac{3630}{18\,000} < \frac{a}{b} < \frac{3632}{18\,000} = \frac{1816}{9000}$.

Ez alapján a legkisebb nevező a 18 000, a számláló pedig a 3631.

4.2. Számrendszerek

257. Felhasználva, hogy egy n -alapú számrendszerben a helyek értéke hátulról indulva:
 $n^0, n^1, n^2, n^3, n^4, \dots$ az átváltások:

- a) $10000_2 = 1 \cdot 2^4 = 16$;
 $111_2 = 4 + 2 + 1 = 7$;
 $101010101_2 = 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = 341$;
 b) $100_3 = 3^2 = 9$;
 $211_3 = 2 \cdot 9 + 3 + 1 = 22$;
 $1022_3 = 1 \cdot 27 + 0 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 35$;
 c) 40; 60; 84.

258. Felhasználva, hogy egy n -alapú számrendszerben a helyek értéke hátulról indulva:
 $n^0, n^1, n^2, n^3, n^4, \dots$ az átváltások:

- a) 1_2 ; 1000_2 ; 10000_2 ; 1000000_2 ;
 b) $10 = 8 + 2 = 1010_2$; 1111_2 ; 101100_2 ; 1100100_2 ; 101000001_2 .

259. Az előző feladathoz hasonlóan:

- a) 10_5 ; 1_5 ; 100000_5 ; 10000_5 ; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = 5^4 = 10000_5$;
 b) $10 = 2 \cdot 5 = 20_5$; $15 = 30_5$; $44 = 134_5$; $100 = 400_5$;
 $321 = 2 \cdot 125 + 2 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 1 = 2241_5$.

260. (A 10-nél nagyobb alapú számrendszerekben a 9-esnél nagyobb számjegyek is szükségesek, melyeknek betűket feleltetünk meg: A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15.)

- a) $50 = 32 + 16 + 2 = 110010_2$;
 $50 = 1 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 1212_3$;
 $50 = 3 \cdot 16 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 302_4$;
 $50 = 6 \cdot 8 + 2 \cdot 1 = 62_8$;
 $50 = 4 \cdot 12 + 2 \cdot 1 = 42_{12}$;

Hasonlóan az előzőhöz:



4. SZÁMELMÉLET – MEGOLDÁSOK

- b) 111011100_2 ; 122122_3 ; 13130_4 ; 734_8 ; 338_{12} ;
 c) 11111011000_2 ; 2202101_3 ; 133120_4 ; 3730_8 ; $11B4_{12}$.
- 261.** Átváltva a számokat tízes számrendszerbe az összehasonlítások könnyen elvégezhetők:
 a) a második szám a nagyobb;
 b) egyenlők;
 c) az első szám a nagyobb;
 d) az első szám a nagyobb (lásd az előző feladat zárójeles megjegyzését).
- 262.** A hiányzó számjegyet x -szel jelölve:
 a) $2 \overline{1010x_2} \Rightarrow x = 0$;
 b) $6 \overline{20x0_3} \Rightarrow 6 \overline{2 \cdot 3^3 + x \cdot 3 = 54 + 3x} \Rightarrow 6 \overline{3x}$ ebből következően $x = 2$;
 c) $4 \overline{3x33_8} \Rightarrow 4 \overline{3 \cdot 8^3 + x \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 3}$, ami semmilyen x -re sem teljesül, mivel páratlan szám;
 d) $4 \overline{23x4_5} \Rightarrow 4 \overline{329 + 5x}$ ebből következően $x = 3$.
- 263.** Az összeadás és a szorzás elvégzésének szabályai szerint:
 a)
$$\begin{array}{r} 1001_2 \\ + 101_2 \\ \hline 1110_2 \end{array};$$
 b)
$$\begin{array}{r} 230_4 \\ + 123_4 \\ \hline 1013_4 \end{array};$$
 c)
$$\begin{array}{r} 21_3 \cdot 12_3 \\ \hline 21_3 \\ + 112_3 \\ \hline 1022_3 \end{array};$$
 d)
$$\begin{array}{r} 55_6 \cdot 55_6 \\ \hline 451_6 \\ + 451_6 \\ \hline 5401_6 \end{array}.$$
- 264.** Az ismeretlen számrendszer alapját n -nel jelölve:
 a) $100_n = n^2 = 4$ ebből következően $n = 2$;
 b) $22_n = 2n + 2 = 8$ ebből következően $n = 3$;
 c) $1570_n = n^3 + 5n^2 + 7n = 888$, szorzattá alakítás után $n(n^2 + 5n + 7) = 3 \cdot 8 \cdot 37$
 – ha n páros, akkor a zárójelben lévő kifejezés értéke páratlan, ebből következően $n = 8$ és $n^2 + 5n + 7 = 111$, ami valóban teljesül $n = 8$ esetén, vagy $n = 24$ és $n^2 + 5n + 7 = 37$, ami ellentmondás;
 – ha n páratlan, akkor a zárójelben lévő kifejezés értéke is páratlan, de így a szorzatuk nem lehet 888.
 A kijelentés tehát a 8-as számrendszerben igaz.
- 265.** A számok értékét a tízes számrendszerben felírva az állítások:
 a) $x + 3 + 2x + 4 = 4x$ ebből következően $x = 7$;



4. SZÁMELMÉLET – MEGOLDÁSOK

- b) $(x+2)(2x+1) = 2x^2 + 5x + 2$, ami azonosság, tehát bármely, legalább 6-os alapú számrendszerben igaz az állítás (hiszen kisebb alapú számrendszerben nem szerepelhet 5-ös számjegy);
- c) $x^3 + x^2 + 3x + 2 - (3x^2 + x + 3) = 3x^2 + x + 4$, ahonnan szorzattá alakítással adódik $x = 5$.

266. a) Megkeresve az egyes betűk angol ábécé szerinti sorszámát:

T: 20. betű $\Rightarrow$ a kódja: 202,

A: 1. betű $\Rightarrow$ a kódja: 1,

N: 14. betű $\Rightarrow$ a kódja: 112,

K: 11. betű $\Rightarrow$ a kódja: 102,

így a TANK szó kódolva: 2023131123102;

b) Kiolvasva a karaktersorozatból az egyes betűk sorszámát:

1. betű: $2 = 2 \rightarrow B$,

2. betű: $200 = 18 \rightarrow R$,

3. betű: $1 = 1 \rightarrow A$,

4. betű: $211 = 22 \rightarrow V$,

5. betű: $120 = 15 \rightarrow O$,

összeolvasva a kapott betűket a kódolt szó: BRAVO.



5. Függvények – megoldások

5.1. Bevezetés a függvénytanba

267. Pl. egy ember testmagassága függ a táplálkozásától, az életkorától, a szülők génjeitől, stb. ...

268. a) Pl. egy elektromos mezőben egy elektronra ható erő az elektromos térerősségtől függ.

b) Pl. a testek lendülete a test tömegének és sebességének függvénye.

c) Pl. az ideális gázok nyomása a térfogatuk, az abszolút hőmérsékletük és az anyagsűrűségük függvénye.

269. – egyváltozós függvény pl. a négyzet területe ($T(a) = a^2$);

– kétváltozós függvény pl. a forgáshenger térfogata ($V(r, h) = r^2 \pi \cdot h$);

– háromváltozós függvény pl. az általános háromszög kerülete ($K(a, b, c) = a + b + c$).

270. a) függvény; b) nem függvény (egy filmnek lehet több forgatókönyvírója);

c) függvény; d) függvény; e) nem függvény (nem mindenkinek van munkahelye és egy embernek lehet több munkahelye).

271. a) függvény, értékkészlete: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$;

b) függvény, értékkészlete: $\mathbb{R}$;

c) nem függvény, mert a 0-nak nincsen reciproka;

d) nem függvény, mert van olyan szám, amihez több számot rendelünk;

e) függvény, értékkészlete: $\mathbb{Z}^+$;

f) függvény, értékkészlete: $\{1\}$;

g) függvény, értékkészlete: $\mathbb{N}$.

272. c), e), f), h), i).

273. a), b), d), f).

274. a), b), c).

275. a) Pl. a négyzet területe az oldalhosszának függvénye.

b) Pl. a kör kerülete a sugarának függvénye.



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

c) Pl. a háromszög területe az egyik oldalának és a hozzá tartozó magasságának a függvénye.

276. A megfelelő koordinátáknak a hozzárendelési szabályba történő behelyettesítésével:

$$\text{a) } y = -\frac{1}{2} \cdot 3 + 4 = 2,5 \Rightarrow A\left(3; \frac{5}{2}\right);$$

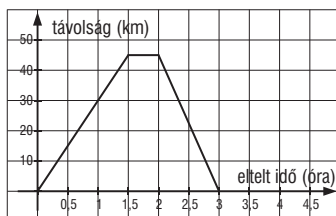
$$0 = -\frac{1}{2} \cdot x + 4 \Rightarrow x = 8, \text{ azaz } B(8; 0);$$

$$\text{hasonlóan } C\left(9; -\frac{1}{2}\right);$$

$$\text{b) } A\left(-3; -\frac{1}{2}\right), \quad B(0; -2), \quad C\left(\frac{5}{2}; \frac{4}{3}\right);$$

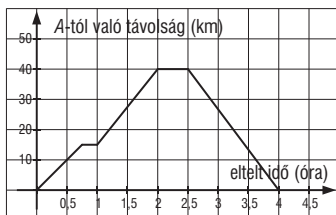
$$\text{c) } A(7; 4), \quad B(4; 3), \quad C\left(\frac{43}{9}; \frac{10}{3}\right).$$

277. a)



b) A grafikon meredeksége a kerékpáros sebességét mutatja.

278. a)



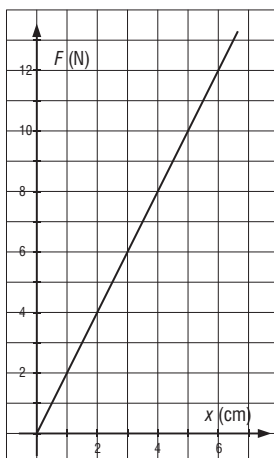
b) A második órában 25 km-t haladtunk, így a 90. perc végén $15 + \frac{25}{2} = 27,5$ km távolságra vagyunk A-tól, a 150. perc végén, azaz 2 és fél óra múlva pedig épp letelik a második pihenőnk, tehát 40 km-re vagyunk A-tól.

c) Visszafelé a sebességünk: $\frac{40 \text{ km}}{1,5 \text{ h}} \approx 26,7 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$

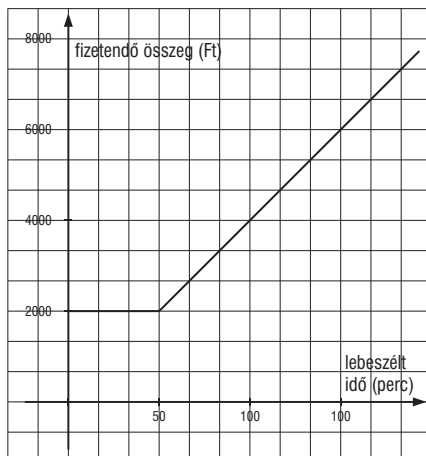


5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

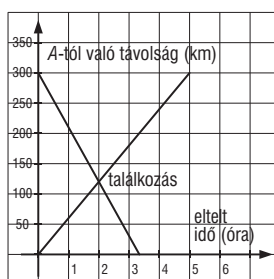
279.



280.



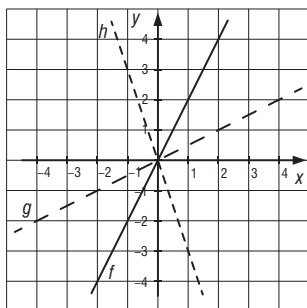
281. a)



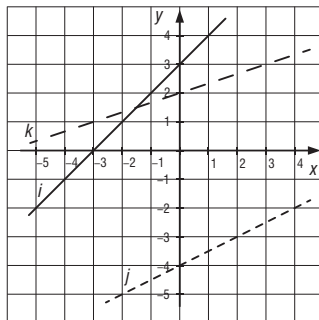
5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

- b) A két grafikon metszéspontjáról a találkozás helye és ideje olvasható le. x -szel jelölve a találkozásig eltelt időt: $x \cdot 60 = 300 - x \cdot 90$, ahonnan $x = 2$, vagyis az indulás után 2 órával találkoznak az autóbuszok; y -nal jelölve a találkozás helyét: $y = 60 \cdot 2 = 120$, vagyis A várostól 120 km-re találkoznak.

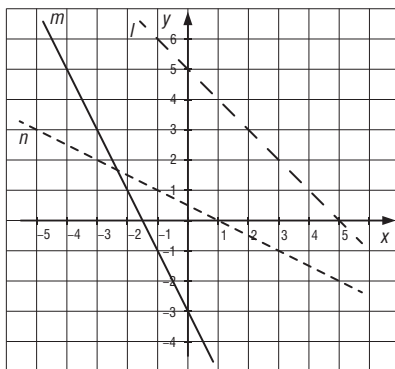
282. a)



b)



c)



A h, l, m, n függvények grafikonjának meredeksége negatív.

283. Használjuk fel, hogy az elsőfokú függvény általános hozzárendelési szabálya $f(x) = a \cdot x + b$, ($a \neq 0$)!

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 4 = a \cdot 0 + b \\ -2 = a \cdot (-4) + b \end{array} \right\}$$

az egyenletrendszer megoldásából $b = 4$ és $a = \frac{3}{2}$ adódik, így $f(x) = \frac{3}{2}x + 4$;

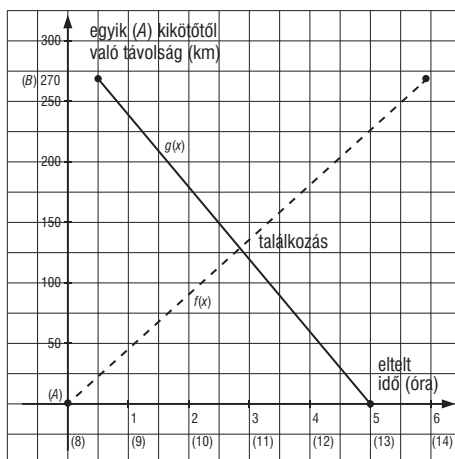
b) $f(x) = -x - 2$;

c) $f(x) = \frac{x+13}{5}$.



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

284. a)



b) Jelölje x a találkozásig eltelt időt (8 órától számítva)!

$$x \cdot 45 = 270 - \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 60, \text{ melyből } x = \frac{20}{7} \text{ adódik, azaz közelítőleg 10 óra 51}$$

perckor találkoznak, az egyik kikötőtől $\frac{20}{7} \cdot 45 = \frac{900}{7} \approx 128,6$ km távolságra.

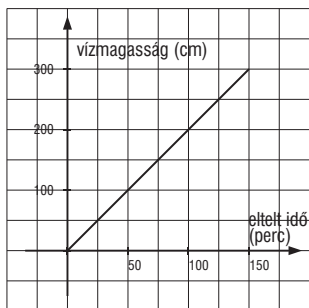
c) $f(x) = 45x$, ahol $x \in [0; 4]$ és

$$g(x) = 270 - 60\left(x - \frac{1}{2}\right) = -60x + 300, \text{ ahol } x \in \left[\frac{1}{2}; 5\right].$$

285. a) A csövek percenként $1,6 \cdot 10^4 \text{ dm}^3 = 16 \text{ m}^3$ térfogatot töltenek meg vízzel, ami

$$\frac{16}{16 \cdot 50} = 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm-es vízszintemelkedést jelent percenként. A feltöltéshez}$$

$$\text{szükséges idő } \frac{300}{2} = 150 \text{ perc.}$$



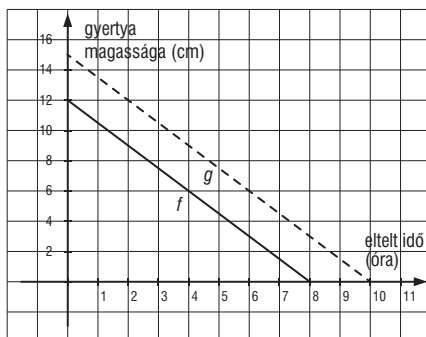
b) $f(x) = 2x$;

c) A keresett időt x -szel jelölve: $\frac{3}{4} \cdot 300 = 2 \cdot x$, ebből $x = 112,5$ perc.



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

286. a)



b) $f(x) = 12 - \frac{3}{2}x$ és $g(x) = 15 - \frac{3}{2}x$.

c) $D_f = [0; 8]$; $R_f = [0; 12]$ és $D_g = [0; 10]$; $R_g = [0; 15]$.

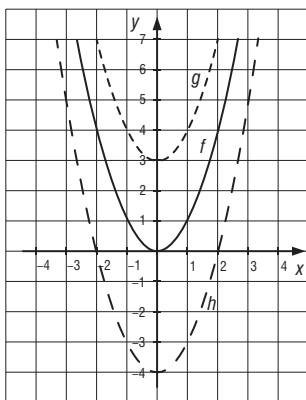
d) $g(x) = 2 \cdot f(x)$, azaz $15 - \frac{3}{2}x = 24 - 3x$, ahonnan $x = 6$, tehát 6 óra múlva lesz az egyik gyertya hossza a másik kétszerese.

e) Sohasem, mert a két grafikon egybeesne, azaz a gyertyák mindig ugyanakkorák lennének.

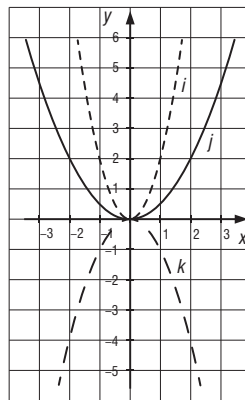
5.2. A függvények ábrázolása, jellemzése

287.

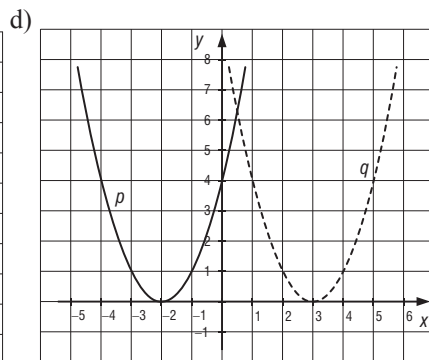
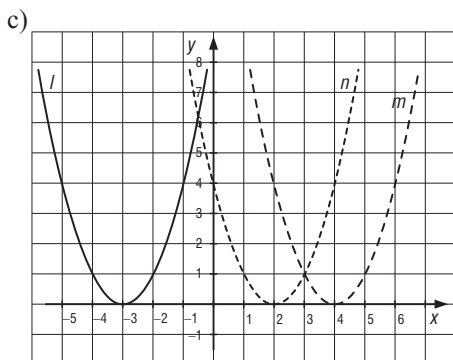
a)



b)



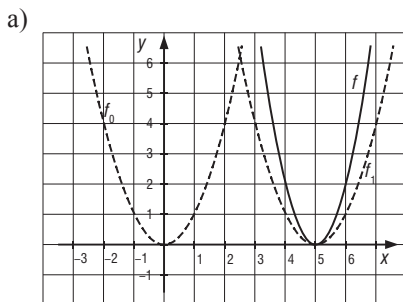
5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK



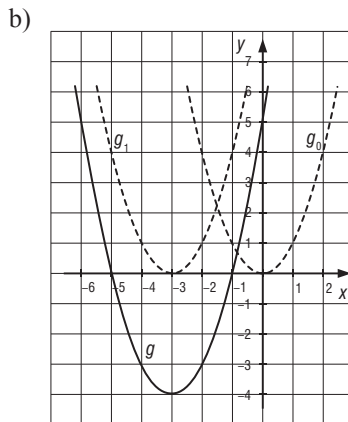
Szélsőértékek:

- maximuma csak a k függvénynek van: $k(0) = 0$;
- minimumok: $f(0) = 0$; $g(0) = 3$; $h(0) = -4$; $i(0) = 0$; $j(0) = 0$;
 $l(-3) = 0$; $m(4) = 0$; $n(2) = 0$; $p(-2) = 0$; $q(3) = 0$.

288.



Zérushely: $f(5) = 0$.

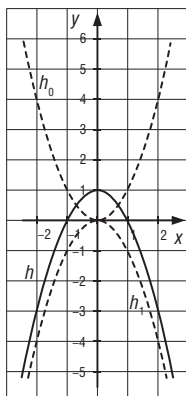


Zérushelyek: $g(-1) = 0$ és $g(-5) = 0$.



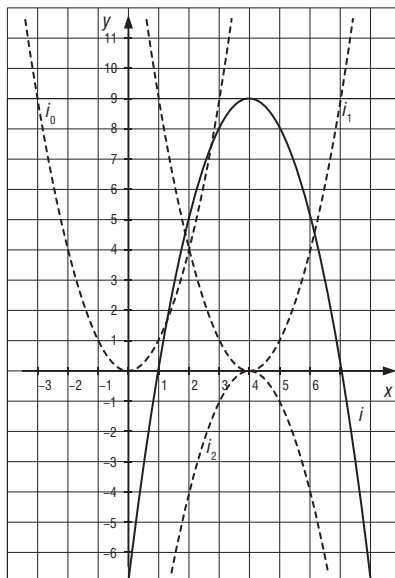
5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

c)



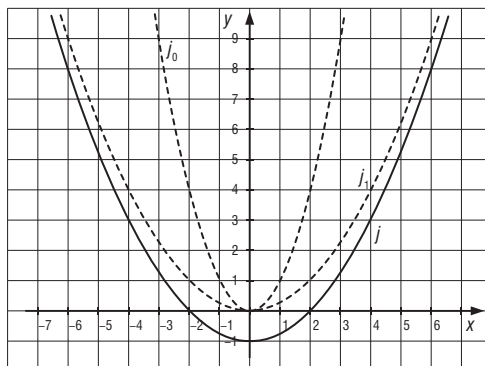
Zérushelyek:
 $h(1) = 0$ és $h(-1) = 0$.

d)



Zérushelyek: $i(1) = 0$ és $i(7) = 0$.

e)

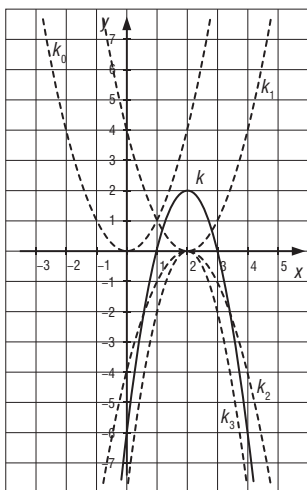


Zérushelyek: $j(-2) = 0$ és $j(2) = 0$.



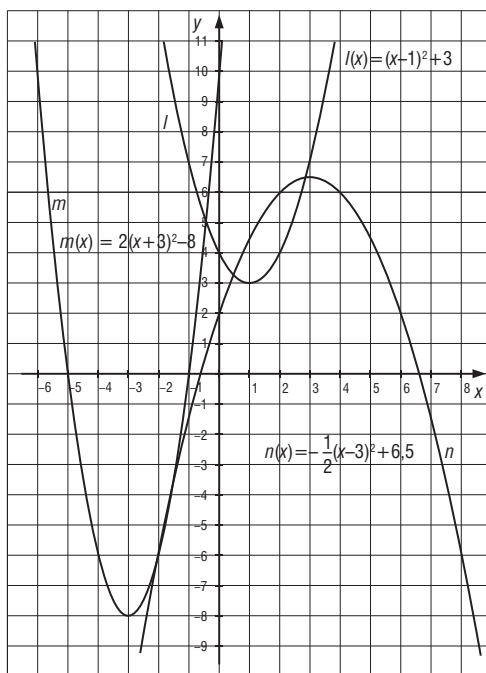
5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

f) g)-i)



Zérushelyek:

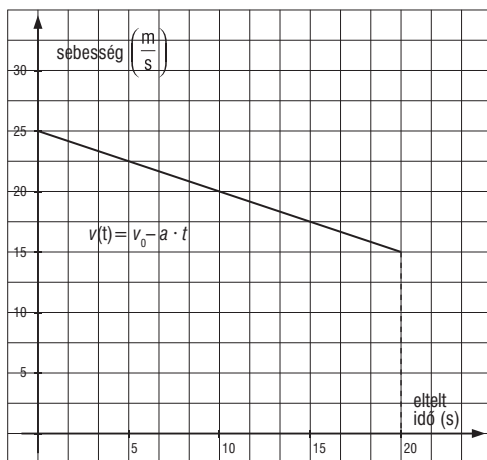
$k(1) = 0$ és $k(3) = 0$.



Zérushelyek: $m(-1) = 0$ és $m(-5) = 0$

$$\underbrace{n(3 - \sqrt{13}) = 0}_{-0,605} \text{ és } \underbrace{n(3 + \sqrt{13}) = 0}_{+6,605}$$

289. a)



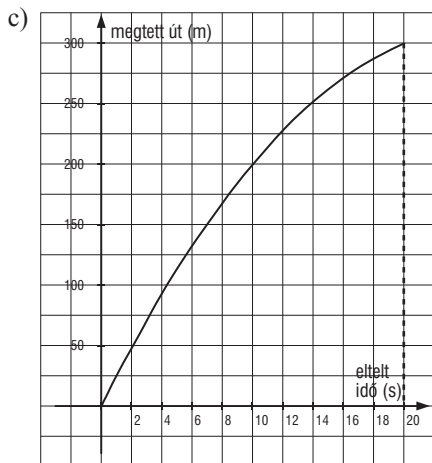
$$90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{90}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$54 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{54}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) $s(t) = 25t - \frac{1}{4}t^2$;



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

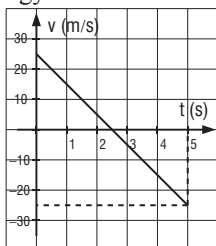


$$s(t) = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 = \frac{a}{2} \left(t + \frac{v_0}{a} \right)^2 - \left(\frac{v_0}{a} \right)^2$$

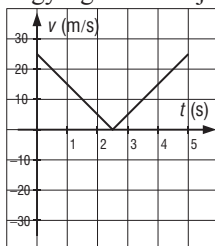
$$a = -0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v_0 = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

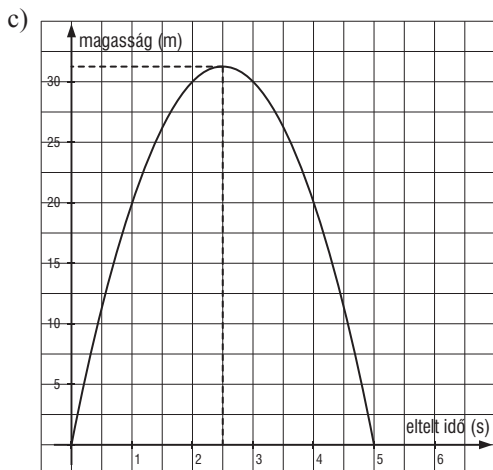
290. a) Ha a sebesség irányát is figyelembe vesszük:



Ha csak a sebesség nagyságát ábrázoljuk:



b) $h(t) = 25t - 5t^2 = -5 \left(t - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{125}{4};$

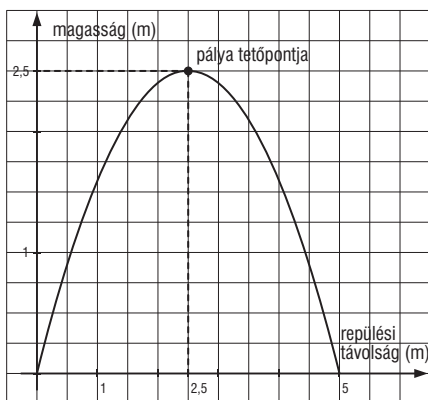


5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

d) Az emelkedés magassága a h függvény maximumának értéke:

$$h_{\max} = 25 \cdot 2,5 - 5 \cdot 2,5^2 = 31,25 \text{ m.}$$

291.



$$s(t) = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 = \frac{a}{2} \left(t + \frac{v_0}{a} \right)^2 - \left(\frac{v}{a} \right)^2$$

$$a = -0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v_0 = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a) A függvény nagyobbik zérushelye adja meg a repülés távolságát, ami 5 m.

b) A legnagyobb magasságot a függvény maximumának értéke adja meg, melyet a két zérushely számtani közepénél vesz fel a függvény:

$$f(2,5) = 2 \cdot 2,5 - 0,4 \cdot 2,5^2 = 2,5, \text{ azaz } 2,5 \text{ m magasan van a pálya tetőpontja.}$$

292. a) A telek területe $T(x) = x \cdot \frac{120-x}{2}$.

b) $T(x)$ függvény maximumának a helye a két zérushely számtani közepe:

$$\frac{0+120}{2} = 60, \text{ azaz } 60 \text{ méteres oldal esetén lesz a telek területe maximális.}$$

293. a) $f(2) = 2^2 + 6 \cdot 2 + c = 0$, amiből $c = -16$.

b) $f(x) = (x+3)^2 - 9 + c$, a minimum $c - 9 = -4 \Rightarrow c = 5$.

c) Egy zérushely van, ha $c - 9 = 0 \Rightarrow c = 9$.

d) $c > 9$.

294. Az f függvény képe egy felfelé nyíló parabola, mert a másodfokú tag együtthatója pozitív. Alakítsuk teljes négyzetté a kifejezést!

$$f(x) = \left(x + \frac{b}{2} \right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

a) A függvény minimumhelye $x = -\frac{b}{2} = -2$, ebből $b = 4$. A minimum értéke

$$c - \frac{b^2}{4} = -5, \text{ amiből } c = -1.$$

b) $f(1) = 1 + b + c = 0$; $f(3) = 9 + 3b + c = 0$. Ezekből $b = -4$ és $c = 3$.



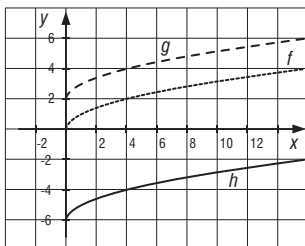
5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

c) Ha a minimumhely nem nagyobb -2 -nél, akkor az adott intervallumon szigorúan monoton növekvő lesz a függvény. Ez $b \geq 4$ esetben teljesül, c értéke tetszőleges.

295. $f(-2) = 4a - 2b + c = 0$; $f(4) = 16a + 4b + c = 0$; $f(0) = c = -6$.

Az egyenletrendszerből $a = \frac{3}{4}$; $b = -\frac{3}{2}$; $c = -6$ adódik.

296. a)

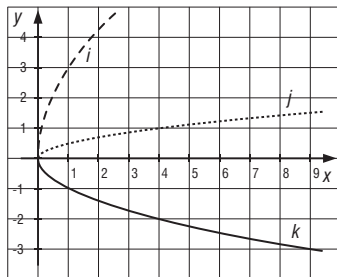


$$D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}^+ \cup \{0\};$$

$$R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\};$$

$$R_g = [2; \infty[; \quad R_h = [-6; \infty[;$$

b)

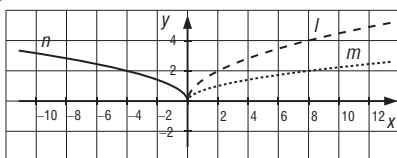


$$D_i = D_j = D_k = \mathbb{R}^+ \cup \{0\};$$

$$R_i = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}; \quad R_j = \mathbb{R}^+ \cup \{0\};$$

$$R_k = \mathbb{R}^- \cup \{0\};$$

c)

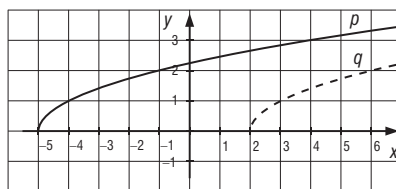


$$D_l = D_m = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}; \quad D_n = \mathbb{R}^- \cup \{0\};$$

$$R_l = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}; \quad R_m = \mathbb{R}^+ \cup \{0\};$$

$$R_n = \mathbb{R}^+ \cup \{0\};$$

d)



$$D_p = [-5, \infty[; \quad D_q = [2, \infty[;$$

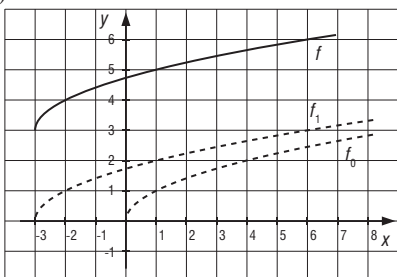
$$R_p = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}; \quad R_q = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

297. Az ábrázolást transzformációs lépésenként hajtsuk végre. Az alapfüggvény minden esetben az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény.

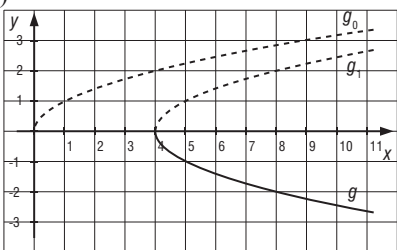
a)



$$f_1(x) = \sqrt{x+3}; \quad f(x) = \sqrt{x+3} + 3;$$

$$D_f = [-3, \infty[;$$

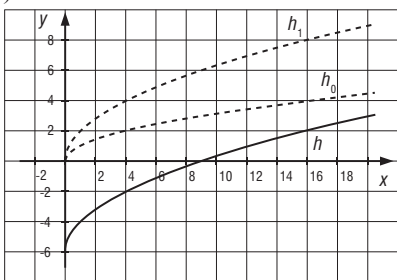
b)



$$g_1(x) = \sqrt{x-4}; \quad g(x) = -\sqrt{x-4};$$

$$R_g =]-\infty; 0];$$

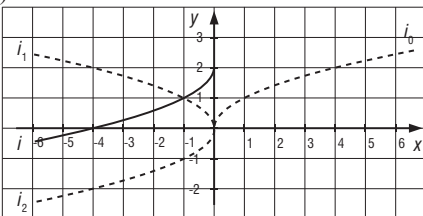
c)



$$h_1(x) = 2\sqrt{x}; \quad h(x) = 2\sqrt{x} - 6;$$

$$x_0 = 9;$$

d)



$$i_1(x) = \sqrt{-x}; \quad i_2(x) = -\sqrt{-x};$$

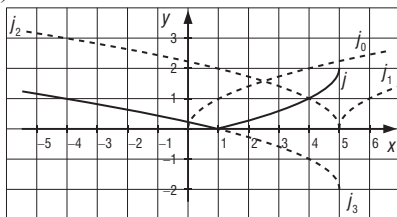
$$i(x) = -\sqrt{-x} + 2;$$

$$R_i =]-\infty; 2];$$



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

e)

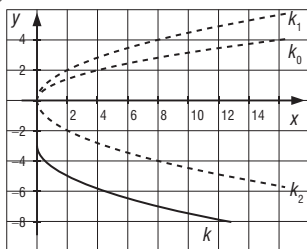


$$j_1(x) = \sqrt{x-5}; \quad j_2(x) = \sqrt{-(x-5)};$$

$$j_3(x) = \sqrt{5-x}-2; \quad j(x) = |\sqrt{5-x}-2|;$$

szélsőérték: minimum $k(1) = 0$, maximum nincs;

f)

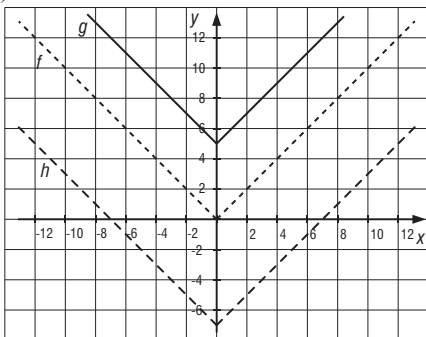


$$k_1(x) = \sqrt{2x}; \quad k_2(x) = -\sqrt{2x}; \quad k(x) = -\sqrt{2x}-3;$$

$$D_k = [0; \infty[; \quad R_k =]-\infty; -3]$$

298.

a)

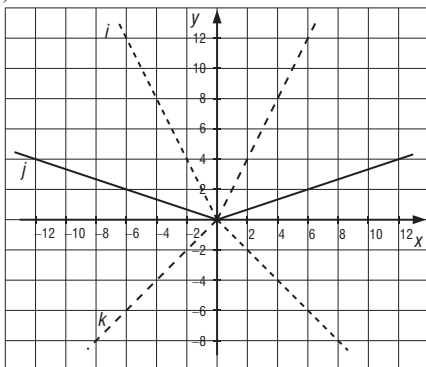


– az f , g , h függvények párosak, és a $]-\infty; 0]$ -on szigorúan monoton csökkenőek, a $[0; \infty[$ -on szigorúan monoton növekednek;



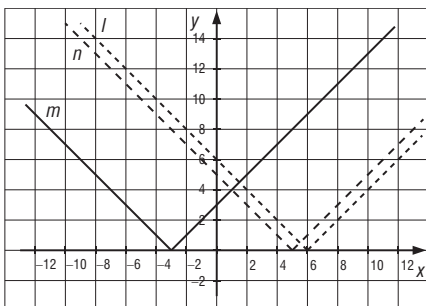
5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

b)



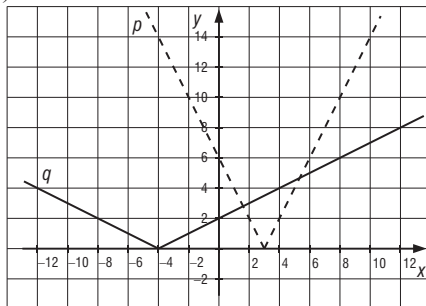
- az i, j, k függvények párosak és az i és j függvények a $]-\infty; 0]$ -on szigorúan monoton csökkenők, a $[0; \infty[$ -on szigorúan monoton növekednek;
- a k függvény a $]-\infty; 0]$ -on szigorúan monoton növekedő, a $[0; \infty[$ -on szigorúan monoton csökkenő;

c)



- a függvények nem párosak és nem páratlanok;
- az l függvény a $]-\infty; 6]$ -on szigorúan monoton csökkenő, a $[6; \infty[$ -on szigorúan monoton növekedő;
- az m függvény a $]-\infty; -3]$ -on szigorúan monoton csökkenő, a $[-3; \infty[$ -on szigorúan monoton növekedő;
- az n függvény a $]-\infty; 5]$ -on szigorúan monoton csökkenő, a $[5; \infty[$ -on szigorúan monoton növekedő;

d)



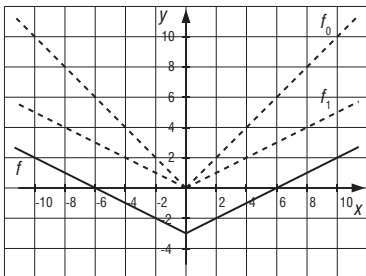
- a függvények nem párosak és nem páratlanok;
- a p függvény a $]-\infty; 3]$ -on szigorúan monoton csökkenő, a $[3; \infty[$ -on szigorúan monoton növekedő;
- a q függvény a $]-\infty; -4]$ -on szigorúan monoton csökkenő, a $[-4; \infty[$ -on szigorúan monoton növekedő.



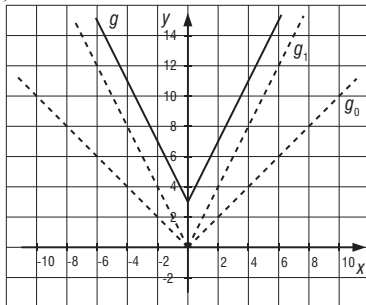
5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

299. Az ábrázolást transzformációs lépésenként hajtsuk végre! Az alapfüggvény az a)-f) esetben az $x \mapsto |x|$, a g) és h) esetben az $x \mapsto x^2$ végül az i) és j) esetben az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény.

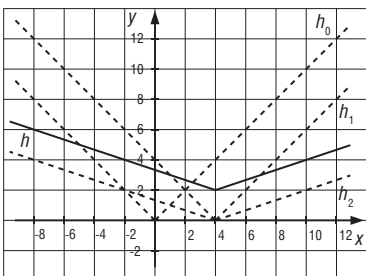
a)



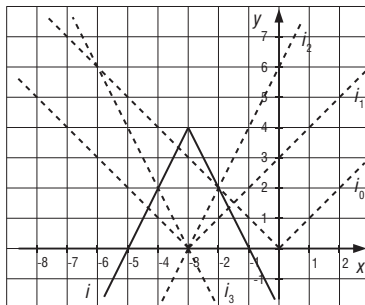
b)



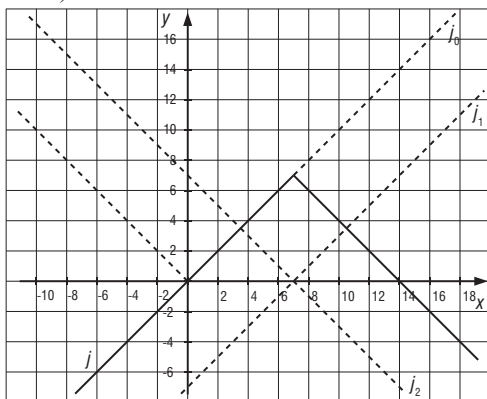
c)



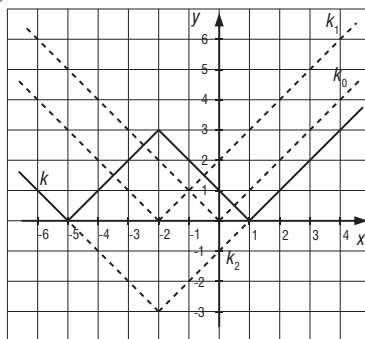
d)



e)

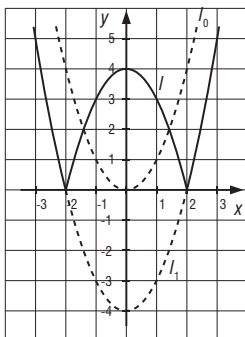


f)

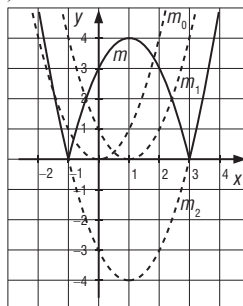


5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

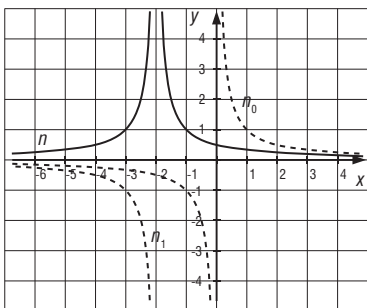
g)



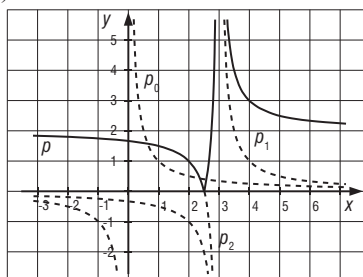
h)



i)

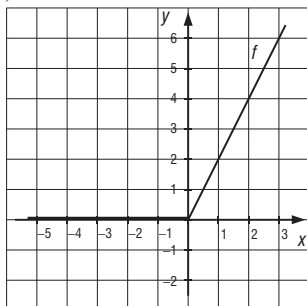


j)



300. Az abszolút érték definícióját felhasználva esetszétválasztással írjuk fel a hozzárendelési szabályokat, majd ábrázoljuk a kapott függvényeket!

a)



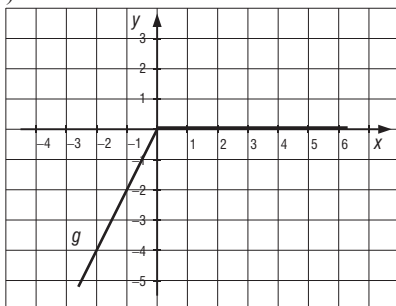
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ 2x, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Az f függvény a $]-\infty; 0]$ -on konstans, a $[0; \infty[$ -on szigorúan monoton növekvő.



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

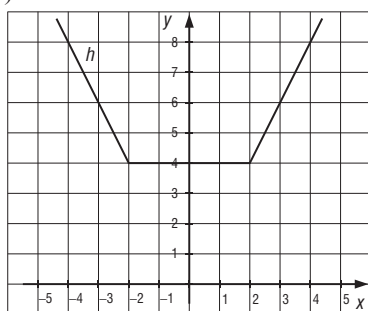
b)



$$g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

A g függvény a $]-\infty; 0]$ -on szigorúan monoton növekvő, a $[0; \infty[$ -on konstans.

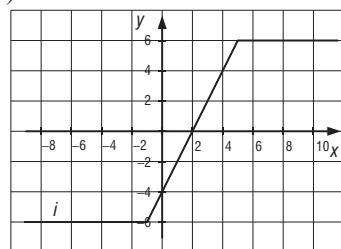
c)



$$h(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ha } x < -2 \\ 4, & \text{ha } -2 \leq x < 2 \\ 2x, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

A h függvény a $]-\infty; -2]$ -on szigorúan monoton csökkenő, a $[-2; 2]$ -on konstans és a $[2; \infty[$ -on szigorúan monoton növekvő.

d)



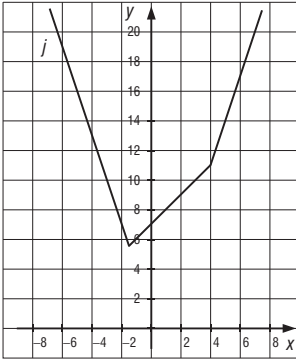
$$i(x) = \begin{cases} -6, & \text{ha } x < -1 \\ 2x - 4, & \text{ha } -1 \leq x < 5 \\ 6, & \text{ha } x \geq 5 \end{cases}$$

Az i függvény a $]-\infty; -1]$ és $[5; \infty[$ -on konstans, a $[-1; 5]$ -on szigorúan monoton növekvő.



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

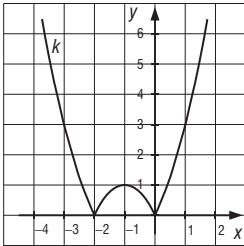
e)



$$j(x) = \begin{cases} -3x + 1, & \text{ha } x < -1,5 \\ x + 7, & \text{ha } -1,5 \leq x < 4 \\ 3x - 1, & \text{ha } x \geq 4 \end{cases}$$

A j függvény a $]-\infty; -\frac{3}{2}]$ -on szigorúan monoton csökkenő, a $[-\frac{3}{2}; \infty[$ -on szigorúan monoton növekvő.

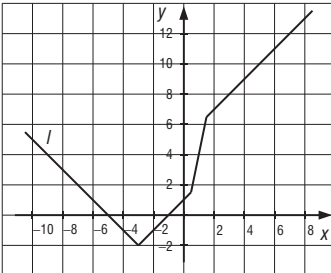
f)



$$k(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{ha } x \leq -2 \text{ vagy } x \geq 0 \\ -x^2 - 2x, & \text{ha } -2 < x < 0 \end{cases}$$

A k függvény $]-\infty; -2]$ és $[-1; 0]$ -on szigorúan monoton csökkenő, a $[-2; -1]$ és $[0; \infty[$ -on szigorúan monoton növekvő.

g)



$$l(x) = \begin{cases} -x - 5, & \text{ha } x < -3 \\ x + 1, & \text{ha } -3 \leq x < 0,5 \\ 5x - 1, & \text{ha } 0,5 \leq x < 1,5 \\ x + 5, & \text{ha } x \geq 1,5 \end{cases}$$

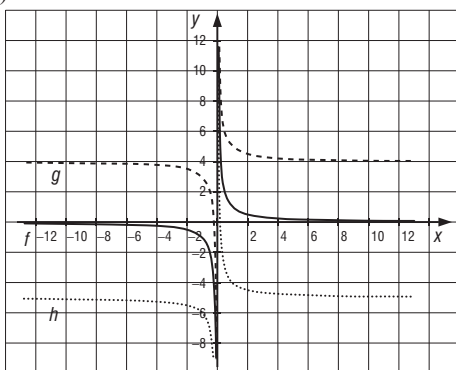
Az l függvény a $]-\infty; -3]$ -on szigorúan monoton csökkenő, a $[-3; \infty[$ -on szigorúan monoton növekvő.



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

301. A feladatban szereplő összes függvény lineáris törtfüggvény, amelyek képe hiperbola.

a)

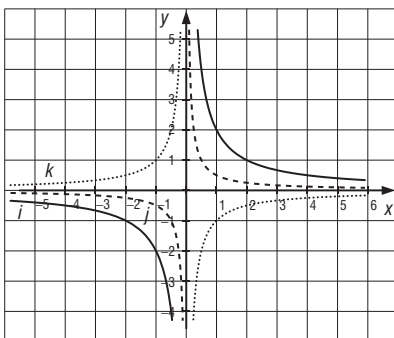


$$D_f = D_g = D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad R_g = \mathbb{R} \setminus \{4\};$$

$$R_h = \mathbb{R} \setminus \{-5\};$$

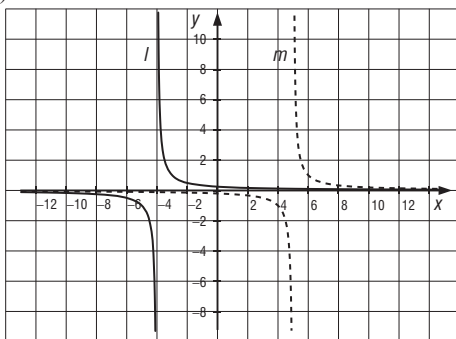
b)



$$D_i = D_j = D_k = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$R_i = R_j = R_k = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

c)



$$D_l = \mathbb{R} \setminus \{-4\}; \quad D_m = \mathbb{R} \setminus \{5\};$$

$$R_l = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad R_m = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

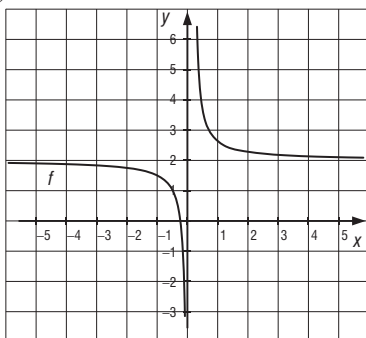
A megadott függvények páratlan függvények.



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

302. Az ábrázolást, hasonlóan a **301.** feladathoz, transzformációs lépésként hajtsuk végre! Az alapfüggvény minden esetben az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény. Az átalakítások után a következő grafikonokat kapjuk.

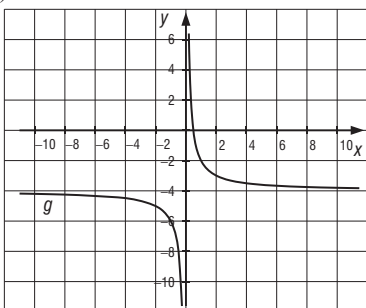
a)



$$f(x) = \frac{1}{2x} + 2;$$

$$R_f = \mathbb{R} \setminus \{2\};$$

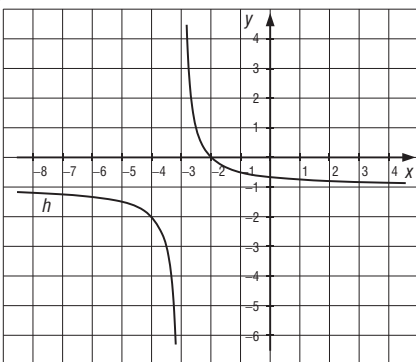
b)



$$g(x) = \frac{2}{x} - 4;$$

$] -\infty; 0[$ és $]0; \infty[$ -on szigorúan
monoton csökkenő;

c)



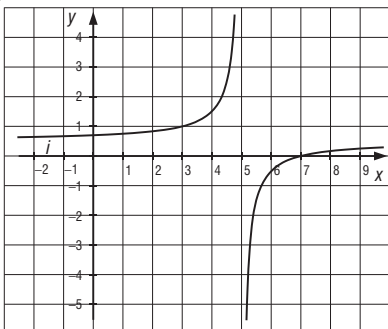
$$h(x) = \frac{1}{x+3} - 1;$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-3\};$$



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

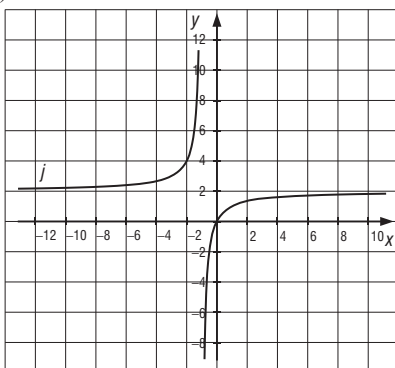
d)



$$i(x) = -\frac{1}{x-5} + \frac{1}{2};$$

zérushely: $x_0 = 7$;

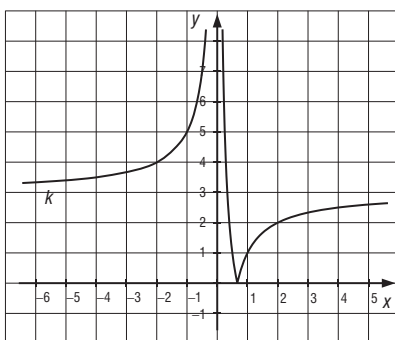
e)



$$j(x) = 2 - \frac{2}{x+1};$$

$$R_j = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$$

f)



$$k(x) = \left| \frac{2}{x} - 3 \right|;$$

szélsőérték: minimum $k\left(\frac{2}{3}\right) = 0$;

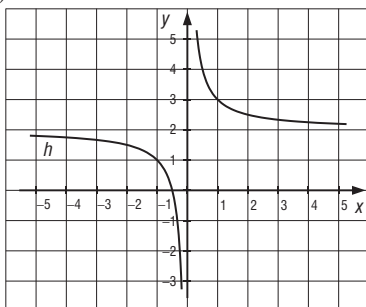
maximum nincs.



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

303. Hasonlóan járunk el mint a **301.** feladatban. Az átalakítások után a következő grafikonokat kapjuk:

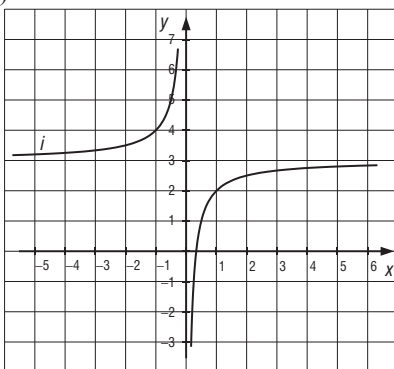
a)



$$h(x) = \frac{1}{x} + 2;$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad R_h = \mathbb{R} \setminus \{2\};$$

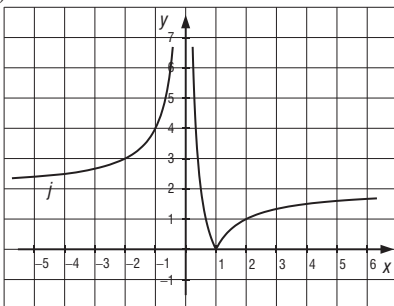
b)



$$i(x) = 3 - \frac{1}{x};$$

$$D_i = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad R_i = \mathbb{R} \setminus \{3\};$$

c)



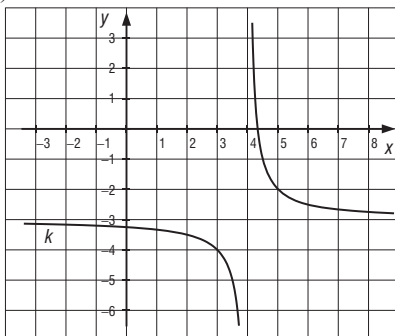
$$j(x) = \left| \frac{2}{x} - 2 \right|;$$

$$D_j = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad R_j = \mathbb{R}^+ \cup \{0\};$$



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

d)

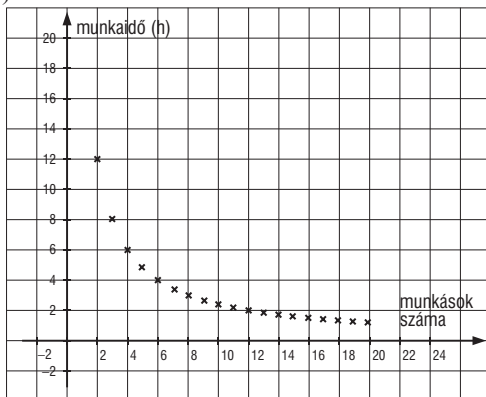


$$k(x) = \frac{1}{x-4} - 3;$$

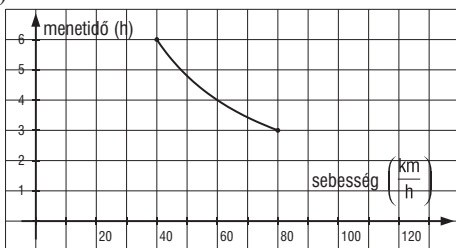
$$D_k = \mathbb{R} \setminus \{4\}; \quad R_k = \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

304. a) fordított arányosság;

b)



305. a)



b) $t(v) = \frac{240}{v}; \quad D = [40; 80]; \quad R = [3; 6].$



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

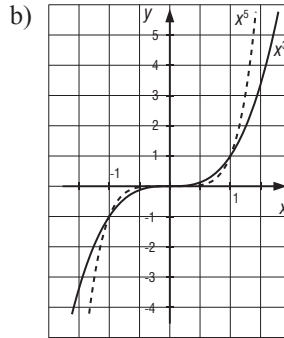
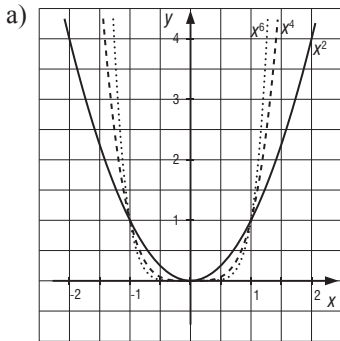
306. Keressük a lineáris törtfüggvény hozzárendelési szabályát $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ alakban!

- a) Az értelmezési tartomány miatt $c = -2$, $f(0) = 6$ miatt $b = -12$ és $f(3) = 3$ miatt az $a = 5$. Így a keresett függvény hozzárendelési szabálya: $f(x) = \frac{5x-12}{x-2}$.
- b) $f(x) = 0$, ha $x = \frac{12}{5}$.

307. Rácspontnak hívunk egy pontot a koordináta-rendszerben, ha mindkét koordinátája egész szám. Alakítsuk át a hozzárendelési szabályokat! Használjuk fel azt, hogy egy törtkifejezés értéke akkor egész, ha a nevező értéke osztója a számlálónak!

- a) $3 + \frac{1}{x}$ egész, ha x osztója 1-nek. Ebből $x = 1$ és $x = -1$, azaz 2 rácsponton megy át a függvény képe.
- b) $2 + \frac{6}{x-3} \Rightarrow x-3 \mid 6$. Mivel a 6-nak 8 db egész osztója van, ezért a függvény képe 8 rácsponton megy át.
- c) $\frac{7}{2-x} - 2 \Rightarrow 4$ rácspont.

308.



309. A kapott test egy négyzet alapú hasáb, amelynek alapéle $18 - 2x$, magassága x cm hosszú.

- a) $V(x) = x(18 - 2x)^2 = 4x^3 - 72x^2 + 324x$ $0 < x < 9$.
- b) $V = 2 \cdot 2x \cdot (9 - x) \cdot (9 - x)$, ahol minden tényező pozitív. Használjuk fel a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget!

$$\sqrt[3]{2x \cdot (9-x) \cdot (9-x)} \leq \frac{2x + 9 - x + 9 - x}{3} = 6, \text{ azaz}$$

$$\sqrt[3]{\frac{V}{2}} \leq 6, \text{ amiből } V \leq 2 \cdot 6^3 = 432. \text{ A térfogat maximális, ha } 9 - x = 2x, \text{ azaz } x = 3.$$



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

A legnagyobb térfogatú dobozt akkor kapjuk, ha 3 cm élű négyzeteket vágunk ki a sarkokból.

- 310.** A négyzetgyökvonás definíciója miatt $0 \leq x(10-x)$, ezért a függvény értelmezési tartománya a $[0; 10]$. Mivel mindkét tényező nemnegatív, ezért felírhatjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget. $\sqrt{x(10-x)} \leq \frac{x+10-x}{2} = 5$, ahol az egyenlőség $x = 10-x$ esetén teljesül. A függvény maximuma az 5, amit $x = 5$ esetén vesz fel. Mivel $f(0) = f(10) = 0$ és a függvényértékek nemnegatívak, ezért a függvény minimuma a 0.

- 311.** Mivel $x > 0$, használjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget!

$\frac{x + \frac{9}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 3$, azaz $f(x) = x + \frac{9}{x} \geq 6$. Egyenlőség akkor van, ha $x \neq \frac{9}{x}$. A függvény minimuma a 6, amit $x = 3$ esetén vesz fel.

- 312.** Mivel a teljes értelmezési tartományon f pozitív, ezért a szélsőértékeit ugyanott vesszi fel, mint f^2 .

$$f^2(x) = x - 2 + 2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{6-x} + 6 - x = 4 + 2\sqrt{(x-2)(6-x)} \leq 4 + 2 \cdot \frac{x-2+6-x}{2} = 8,$$

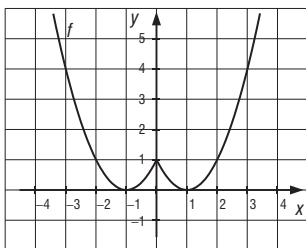
ahol az egyenlőség $x - 2 = 6 - x$ esetén teljesül. A függvények maximuma

$f(4) = 2\sqrt{2}$. Másrészt $f^2(x) \geq 4$, azaz $f(x) \geq 2$. A függvény minimuma $f(2) = f(6) = 2$.

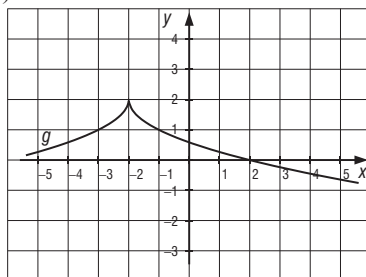
- 313.** Az állítások közül hamis: b), c).

- 314.** Hasonlóan járunk el, mint a **299.** feladatban! Az átalakítások után a következő grafikonokat kapjuk:

a)

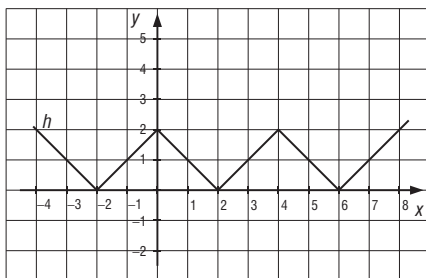


b)

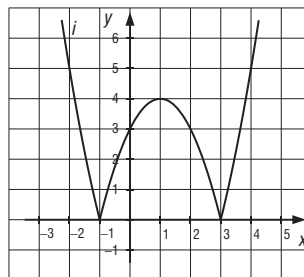


5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

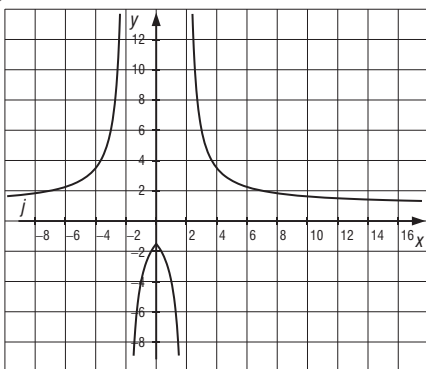
c)



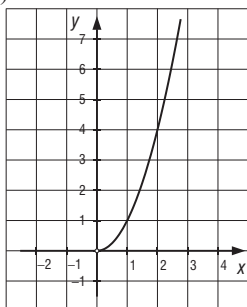
d)



e)



315. a)

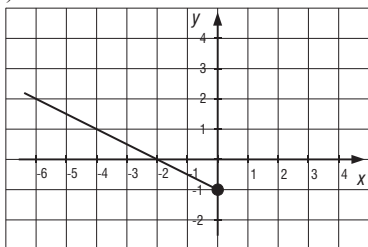


$D_f = \mathbb{R}^+$; $R_f = \mathbb{R}^+$; zérushely: nincs, szélsőérték: nincs, menete: szigorúan monoton növekvő.



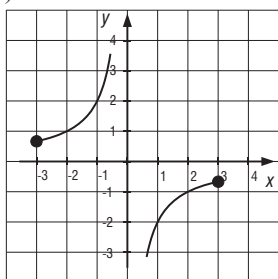
5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

b)



$D_g = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$; $R_g = [-1; \infty[$; zérushely: $x_0 = -2$; szélsőérték: minimum $g(0) = -1$, maximum nincs; menete: szigorúan monoton csökkenő.

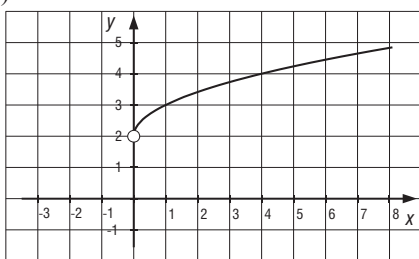
c)



$$D_h = [-3; 3] \setminus \{0\}; \quad R_h = \left] -\infty; -\frac{2}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}; \infty \right[,$$

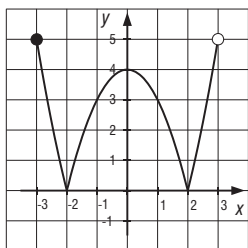
zérushely: nincs; szélsőérték: nincs; menete: $[-3; 0[$ és $]0; 3]$ -on szigorúan monoton növekvő.

d)



$D_i = \mathbb{R}^+$; $R_i =]2; \infty[$, zérushely: nincs; szélsőérték: nincs, menete: szigorúan monoton növekvő.

e)



$D_j = [-3; 3[$; $R_j = [0; 5]$; zérushely: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; szélsőérték: minimum $j(-2) = j(2) = 0$; maximum $j(0) = 4$; menete: $[-3; -2]$ és $[0; 2]$ -on szigorúan monoton csökkenő; $[-2; 0]$ és $[2; 3[$ -on szigorúan monoton növekvő.



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

316. A megfelelő hozzárendelési szabályok:

a) C

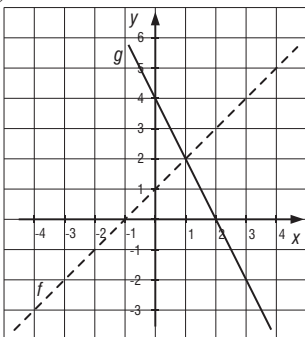
b) A

c) B

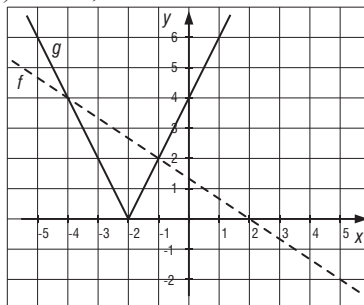
d) D

317. $f(x) = g(x)$, ha

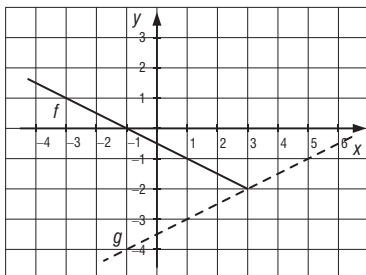
a) $x = 1$



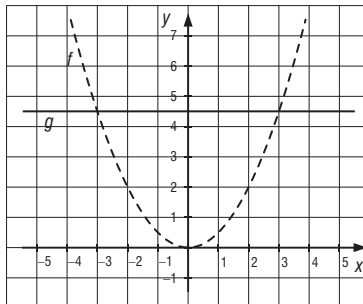
b) $x = -4; x = -1$



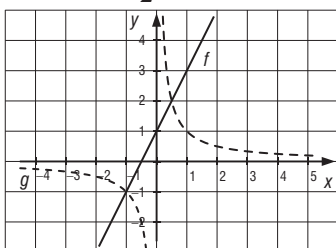
c) $x \geq 3$



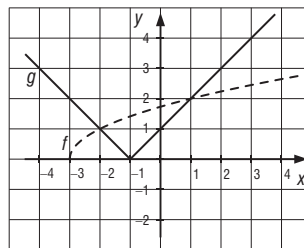
d) $x = -3; x = 3$



e) $x = -1; x = \frac{1}{2}$

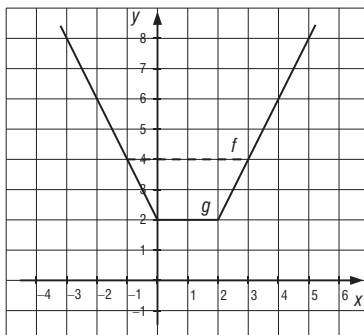


f) $x = 1; x = -2$



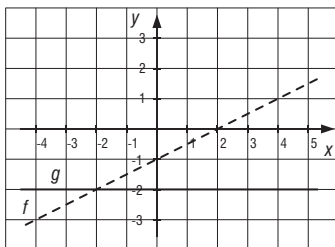
5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

g) $x \leq -1$ vagy $3 \leq x$

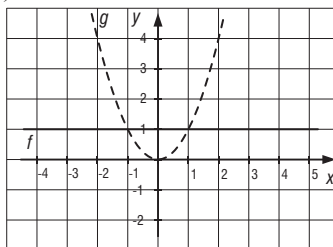


318. $f(x) > g(x)$, ha

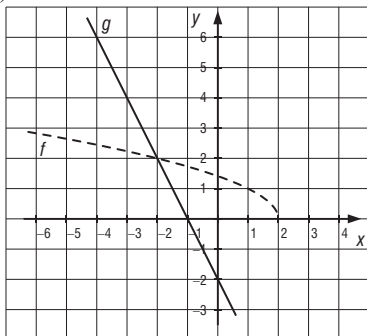
a) $x > -2$



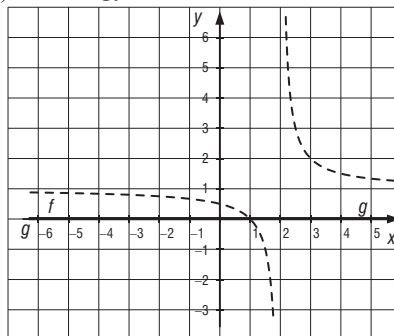
b) $-1 < x < 1$



c) $-2 < x \leq 2$

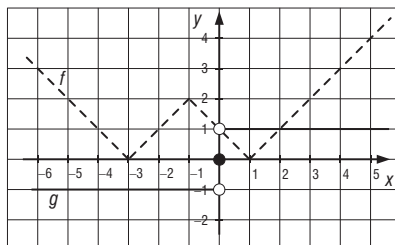


d) $x < 1$ vagy $x > 2$



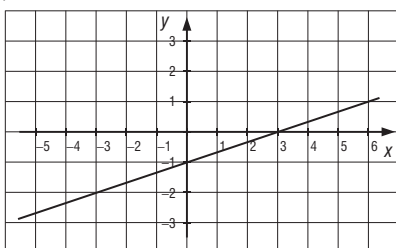
5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

e) $x \leq 0$ vagy $x > 2$

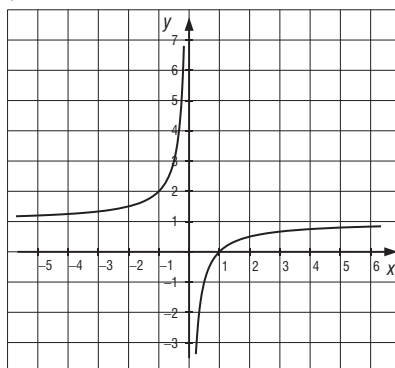


319. $f(x) < 0$, ha

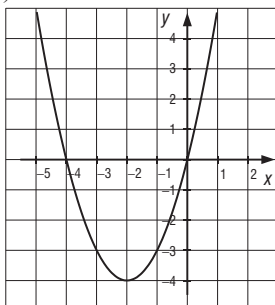
a) $x < 3$



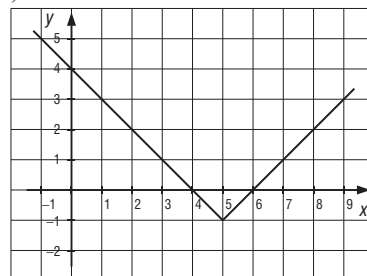
b) $0 < x < 1$



c) $-4 < x < 0$

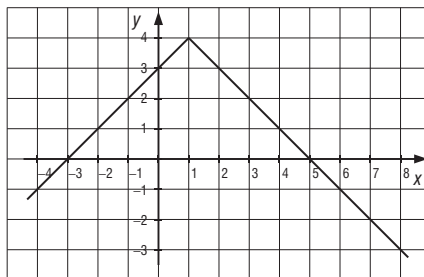


d) $4 < x < 6$



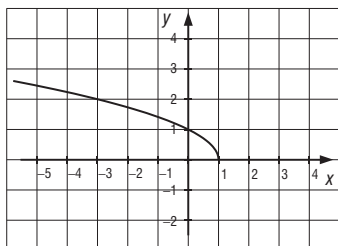
5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

e) $x < -3$ vagy $x > 5$

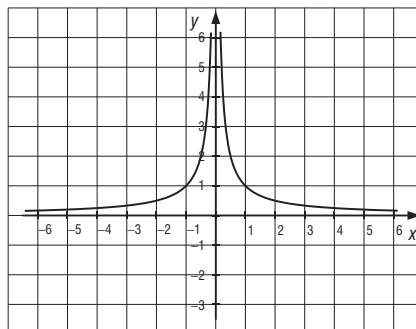


320. $g(x) > 0$, ha

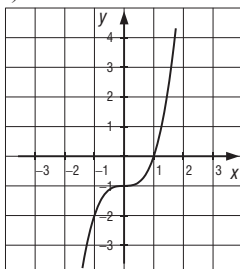
a) $x < 1$



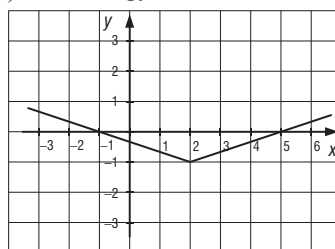
b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



c) $x > 1$



d) $x < -1$ vagy $x > 5$



5. FÜGGVÉNYEK – MEGOLDÁSOK

321. $D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f(f(x)) = 2(2x-1)-1 = 4x-3, \quad D_{f \circ f} = \mathbb{R};$$

$$f(g(x)) = 2 \cdot \frac{x+1}{x} - 1 = \frac{x+2}{x}, \quad D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$g(f(x)) = \frac{2x-1+1}{2x-1} = \frac{2x}{2x-1}, \quad D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\};$$

$$g(g(x)) = \frac{\frac{x+1}{x} + 1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{2x+1}{x+1}, \quad D_{g \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}.$$

322. $f(g(x)) = \sqrt{2-x^3+6} = \sqrt{8-x^3}, \quad D =]-\infty; 2].$

323. Egy-egy lehetséges megoldás:

a) $f(x) = x^3; \quad g(x) = 2x+1; \quad D_f = D_g = \mathbb{R}$, ekkor $i(x) = 2x^3+1; \quad D_i = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = 2|x|-4; \quad g(x) = x-3; \quad D_f = D_g = \mathbb{R}$, ekkor $i(x) = 2|x|-7; \quad D_i = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \frac{4}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad g(x) = x^2+4, \quad D_g = \mathbb{R}$, ekkor

$$i(x) = \frac{16}{x^2} + 4, \quad D_i = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

d) $f(x) = \sqrt{x}, \quad D_f = \mathbb{R}_0^+; \quad g(x) = x^2+2x, \quad D_g = \mathbb{R}$, ekkor

$$i(x) = x+2\sqrt{x}, \quad D_i = \mathbb{R}_0^+.$$

324. Mivel mindkét esetben az összetett függvény elsőfokú, ezért $g(x)$ is elsőfokú. Legyen $g(x) = ax + b$!

a) $f(g(x)) = 2(ax+b)+3 = 2ax+2b+3$. Ebből $2a = 3$ és $2b+3 = 2$, amiből

$$a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}. \text{ A keresett függvény } g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

b) Hasonló módon kapjuk, hogy $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

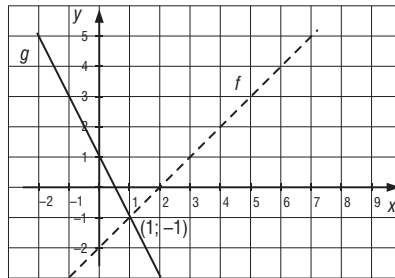


6. Egyenletek – megoldások

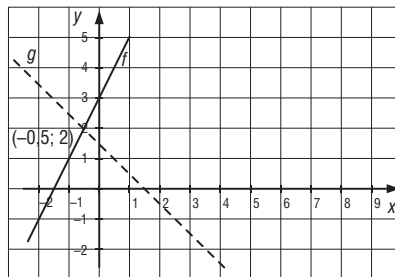
6.1. Egyenletek grafikus megoldása

325. Vegyük azt a két függvényt, amelynek hozzárendelési szabályai az egyenlet két oldalán álló kifejezések! Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a két függvényt! A közös pontok első koordinátái adják az egyenlet megoldásait. Behelyettesítéssel ellenőrizni kell.

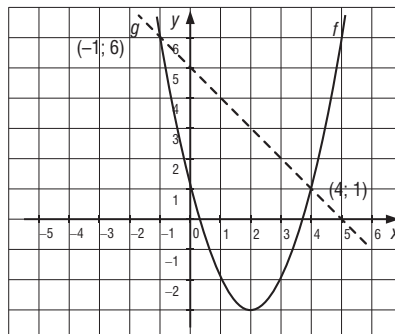
a) $x = 1$



b) $x = -\frac{1}{2}$

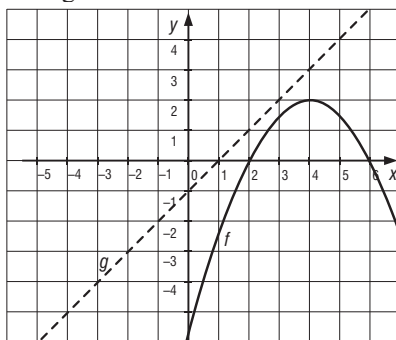


326. a) $x = -1$; $x = 4$

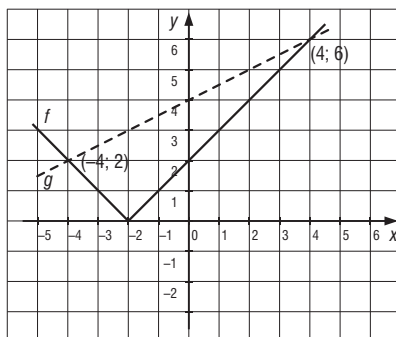


6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

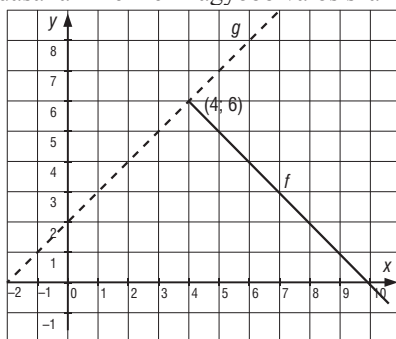
b) Az egyenletnek nincs megoldása.



327. a) $x = -4$; $x = 4$

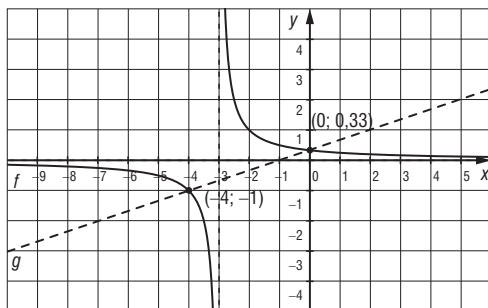


b) Az egyenlet megoldásai a 4-nél nem nagyobb valós számok.

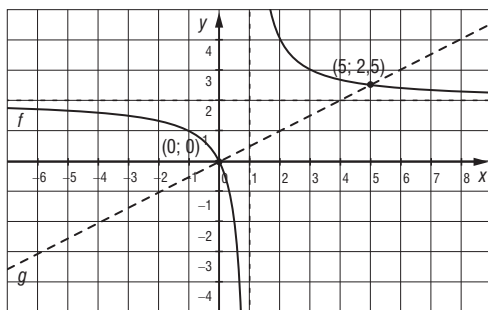


6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

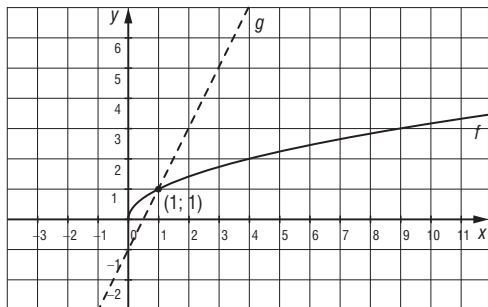
328. a) $x = -4$; $x = 0$



b) $x = 0$; $x = 5$

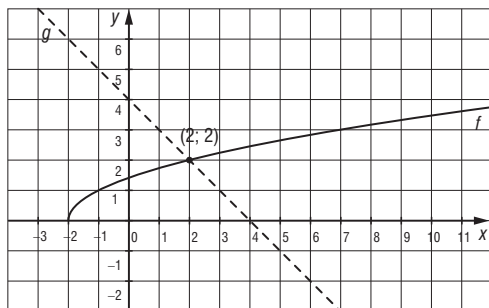


329. a) $x = 1$

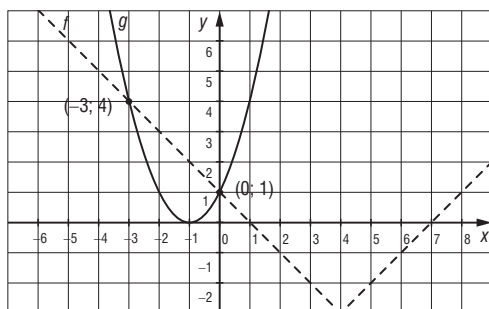


6. ÉGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

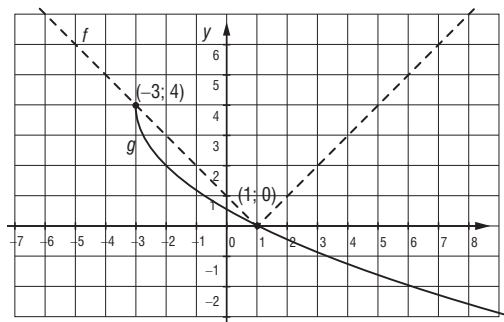
b) $x = 2$



330. a) $x = -3; x = 0$

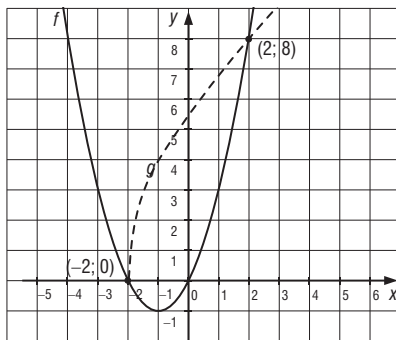


b) $x = -3; x = 1$

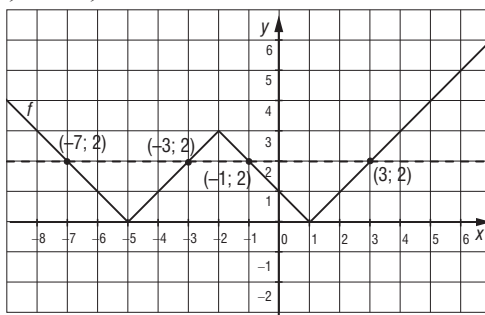


6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

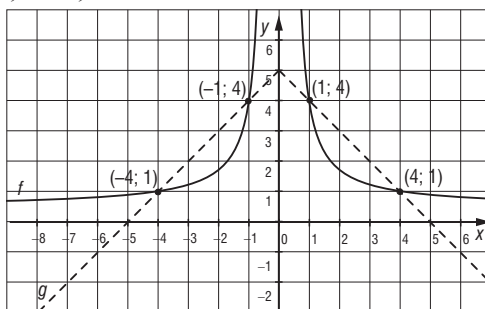
c) $x = -2; x = 2$



331. a) $x = -7; x = -3; x = -1; x = 3$

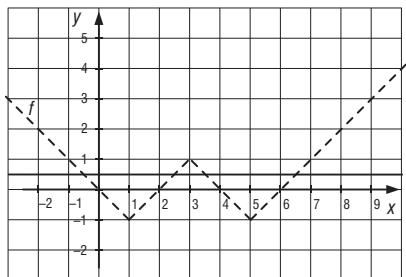


b) $x = -4; x = -1; x = 1; x = 4$



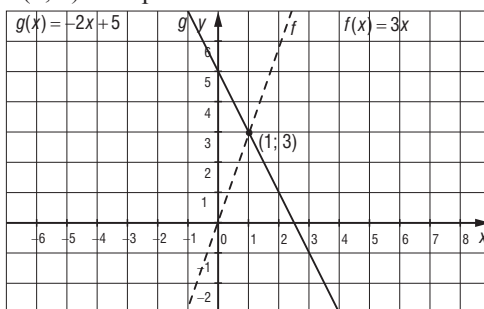
6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

332. Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ||x - 3| - 2| - 1$ függvényt! Az egyenlet jobb oldala konstans, aminek megfelelő függvény képe egy x tengellyel párhuzamos egyenes.

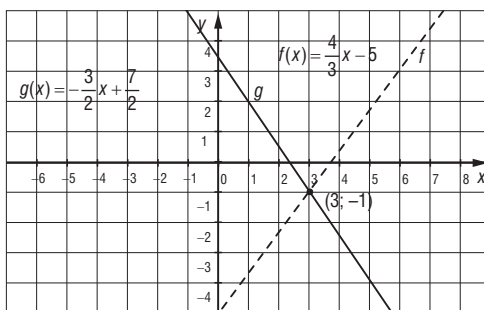


Az egyenlet megoldásainak száma p -től függően:

- ha $p < -1$, akkor nincs megoldás;
 - ha $-1 < p < 1$, akkor 4 megoldás van;
 - ha $p = 1$, akkor 3 megoldás van;
 - ha $p = -1$, vagy $p > 1$, akkor 2 megoldás van.
333. Az egyenletrendszerek mindkét egyenletéből fejezzük ki y -t, és a kapott egyenleteknek megfelelő függvényeket ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben! A két egyenes metszéspontjának koordinátái adják az egyenletrendszer megoldását.
- a) A megoldás az $(1; 3)$ számpár.

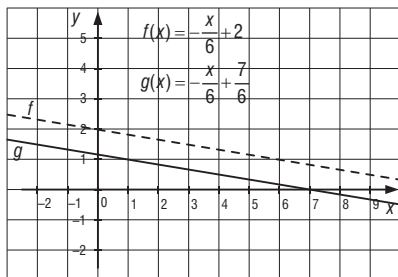


b) A megoldás a $(3; -1)$ számpár.

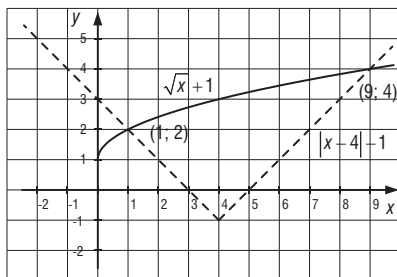


6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

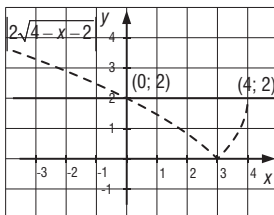
c) Nincs megoldása az egyenletrendszernek, mert a grafikonok párhuzamosak.



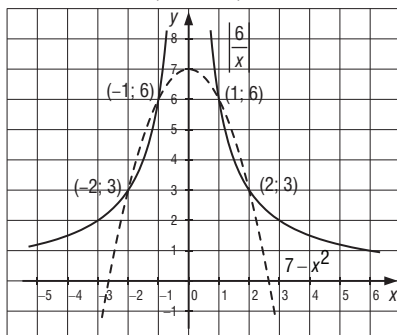
334. a) Az egyenlet megoldásai: $x = 1$ és $x = 9$.



b) Az egyenlet megoldásai: $x = 0$ és $x = 4$.

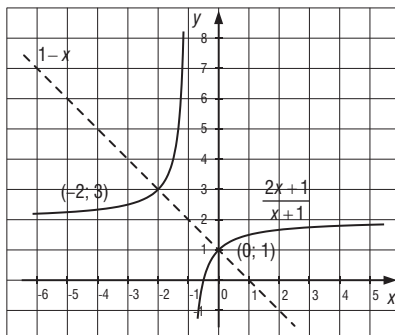


c) Az egyenlet megoldásai: $x = -2$; $x = -1$; $x = 1$ és $x = 2$.

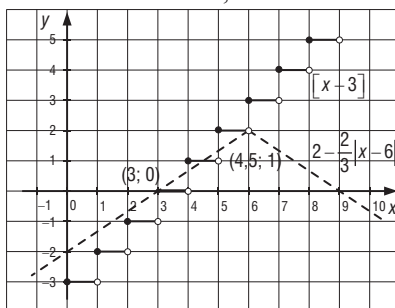


6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

d) Az egyenlet megoldásai: $x = -2$ és $x = 0$.



e) Az egyenlet megoldásai: $x = 3$ és $x = 4,5$.



6.2. Az egyenletekről

335. a) $x = -\frac{3}{4}$; b) $x = 3$; c) $x = -1$; d) $x = \frac{6}{5}$.

336. a) $x = \frac{7}{5}$; b) $x = 0$; c) $x = \frac{3}{5}$; d) $x = -\frac{5}{2}$.

337. a) $x = \frac{5}{3}$; b) nincs megoldás; c) $x = 3$;
d) $x = -14$; e) $x = 12$; f) $x = -\frac{1}{2}$.

338. a) $x = 4$; b) $x = 19$; c) nincs megoldás a természetes számok halmazán;
d) nincs megoldása a megadott halmazon;
e) azonosság, $x \in]-1; 8[$;
f) nincs megoldás a pozitív racionális számok halmazán.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

339. A kijelölt műveletek elvégzése és összevonás után elsőfokú egyenleteket kapunk, amelyek megoldása:

- a) $x = \frac{1}{4}$; b) $x = -\frac{4}{9}$; c) $x = 2$; d) $x = -5$;
 e) $x = 6$; f) $x = -1$; g) $x = \frac{8}{21}$; h) $x = 10$;
 i) nincs megoldás; j) nincs megoldás; k) nincs megoldás.

340. Egyszerűsítsük a törtkifejezéseket (nem ekvivalens átalakítás!), majd oldjuk meg a kapott elsőfokú egyenleteket, és a megoldásokat ellenőrizzük!

- a) $x + 3 = 3$, amiből $x = 0$; $D = \mathbb{Z} \setminus \{-3\}$
 b) $x - 1 = x + 1$, aminek nincs megoldása; $D = \mathbb{Z} \setminus \{1\}$
 c) $x - 2 = 2x + 1$, amiből $x = -3$; $D = \mathbb{Z} \setminus \{-2\}$
 d) $\frac{x-1}{3} = x - 5$, amiből $x = 7$. $D = \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

341. Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd határozzuk meg p értékét úgy, hogy azonoságot kapjunk!

$$\begin{aligned} \text{a) } 7x - 12 + 10p &= 7x - 28 & \text{b) } p &= \frac{82}{15}. \\ -12 + 10p &= -28 \\ 10p &= -16 \\ p &= -\frac{8}{5} \end{aligned}$$

342. Az előző feladatból következően $p \neq -\frac{8}{5}$, illetve $p \neq \frac{82}{15}$.

343. Rendezzük az ismeretlent tartalmazó tagokat egy oldalra, majd vizsgáljuk a megoldásokat a paraméter függvényében!

- a) $(p - 2)x = p - 2$ egyenletnek $p = 2$ esetén minden valós szám megoldása, $p \neq 2$ esetén $x = 1$;
 b) $px = p^2 + 3p$, aminek $p = 0$ esetben minden valós szám megoldása, $p \neq 0$ esetben $x = p + 3$;
 c) $(p^2 - 1)x = 2p + 2$, aminek $p = 1$ esetén nincs megoldása, $p = -1$ esetén minden valós szám megoldása és $p \neq 1$ és $p \neq -1$ $x = \frac{2}{p-1}$;
 d) $x = p - 1$, ha $p \neq 0$ vagy $p \neq 1$.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

344. Rendezzük az egyenletet x -re, majd vizsgáljuk a megoldást a paramétertől függően!

- a) $x + 1 = px - p \Rightarrow (p - 1)x = p + 1$,
 $p = 1$ esetben nincs megoldás, ha $p \neq 1$, akkor $x = \frac{p+1}{p-1}$;
- b) $x = 1 + \frac{2}{p-1}$, így $x \in \mathbb{Z}$, ha $p-1 \mid 2$, amiből $p = 0$ esetén $x = -1$; $p = 2$ esetén $x = 3$;
 $p = 3$ esetén $x = 2$.

6.3. Törtes egyenletek

345. Az egyenletek alaphalmaza és a megoldások:

- a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nincs megoldás; $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ nincs megoldás;
 b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $x = 0$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $x = -2$;
 c) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\}$ $x = -5$;
 d) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ nincs megoldás.

346. Az alaphalmaz minden esetben $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

- a) nincs megoldás;
 b) $\frac{2x-6}{x-4} = 0$, a megoldás $x = 3$; c) $\frac{3x}{x-4} = 1$, a megoldás $x = -2$;
 d) $\frac{x-4}{x-4} = 1$, a megoldások $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

347. Közös nevezőre hozás, majd rendezés után elsőfokú egyenleteket kapunk.

- a) $(x+1)(x-6) = (x+3)(x-5)$ ebből $-5x-6 = -2x-15$ a megoldás $x = 3$;
 b) $9-3(x-2) = x-3$, a megoldás $x = \frac{9}{2}$;
 c) $2x(x-5) = 2(x-3)(x+1)$, a megoldás $x = 1$;
 d) nincs megoldás.

348. Közös nevezőre hozás majd rendezés után elsőfokú egyenleteket kapunk.

- a) $6x(2x-3) - 3(3x-2) = 2(3x-2)(2x-3)$;
 $12x^2 - 18x - 9x + 6 = 12x^2 - 18x - 8x + 12$, a megoldás $x = -6$.
 Az egyenletnek nincs megoldása a természetes számok halmazán.
- b) $(3x+1)(x+2) - (2x-3)(x-2) = (x-2)(x+2)$;
 $3x^2 + 7x + 2 - 2x^2 + 7x - 6 = x^2 - 4$, a megoldás $x = 0$.
- c) $(x+2)(x+3) + 2(x+1)(x+3) = 3(x+1)(x+2)$;



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

$$x^2 + 5x + 6 + 2x^2 + 8x + 6 = 3x^2 + 9x + 6, \text{ a megoldás } x = -\frac{3}{2}.$$

Az egyenletnek nincs megoldása a természetes számok halmazán.

d) $(x-3)(x-2) - (x+1)(x+2) = 2x - 26;$

$$x^2 - 5x + 6 - x^2 - 3x - 2 = 2x - 26, \text{ a megoldás } x = 3;$$

e) $2 - x(x+1) = (2-x)(x-1),$ a megoldás $x = 1$, ami az alaphalmaz miatt nem megoldás.

f) $x = -2$, így az egyenletnek nincs megoldása a természetes számok halmazán.

349. Alakítsuk a nevezőket szorzattá, majd a közös nevezővel való beszorzás után elsőfokúra vezető egyenletet kapunk.

a) $\frac{3}{(x+3)^2} - \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{2}{(x+3)(x-3)}, \quad x \in \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\};$

$$3(x-3)^2 - (x+3)^2 = 2(x-3)(x+3);$$

$$3x^2 - 18x + 27 - x^2 - 6x - 9 = 2x^2 - 18;$$

$$-24x + 18 = -18$$

$$x = \frac{3}{2} (\in \mathbb{Q});$$

b) $\frac{x^2-3}{(x-2)^2} - \frac{1}{2(x-2)} - \frac{x+1}{x-2} = 0, \quad x \in \mathbb{N} \setminus \{2\};$

$$2(x^2-3) - (x+2) - 2(x+1)(x-2) = 0;$$

$$2x^2 - 6 - x + 2 - 2x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 0 (\in \mathbb{N});$$

Hasonlóan járjunk el, mint az a) és b) esetekben!

c) $x = \frac{1}{2};$

d) $x = -2.$

6.4. Szöveges feladatok

350. Az országúton $0,9 \cdot 5,4 = 4,86$ liter, míg autópályán $1,9 \cdot 6,2 = 11,78$ liter benzint fogyasztottunk. A teljes 280 km alatt 16,64 litert, azaz 100 km-en kb. 5,9 liter 100 km-enként.

351. Anna tippje a test tömegének 90%-a, Beáé pedig ennek 1,2-szerese, azaz a 108%. A különbség a test tömegének 18%-a, ami 0,5 kg. Ebből a test tömege kb. 2,78 kg.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

352. A feladat következtetéssel megoldható.

- a) Ha a kislány 6 éves, akkor az anya 24, az apa 30 és a fiuk 6 éves.
b) Ha a fiú 10 éves, akkor az apa 50, az anya 44 és a kislány 11 éves.

353. Legyen a középső páratlan szám x ! Ekkor $(x-2) + x + (x+2) = 111$. Ennek megoldása $x = 37$. A három szám: 35, 37, 39.

354. Legyen mindhárom esetben a számrendszer alapszáma x !

- a) $22_x = 8 \Rightarrow 2x + 2 = 8 \Rightarrow x = 3$; hármas számrendszerben $22_3 = 8$;
b) $11_x = 12 \Rightarrow x + 1 = 12 \Rightarrow x = 11$; tizenegyes számrendszerben $11_{11} = 12$;
c) $21_x = 7 \Rightarrow 2x + 1 = 7 \Rightarrow x = 3$; hármas számrendszerben $21_3 = 7$.

355. Az 500-as bankjegyek száma x , a 200-asoké $29 - x$. $500x + 200(29 - x) = 10\,000$. Ebből $x = 14$, azaz 14 db 500-ast és 15 db 200-ast kaptunk.

356. $0,3x + 15 = \frac{3}{8}x$ ebből $x = 200$. A keresett szám a 200.

357. Legyen a két szám $2x$, illetve $5x$! Ekkor $2x + 5x = 5x - 2x + 28$, amiből $x = 7$. A keresett számok: 14 és 35.

358. Jelöljük az osztálylétszámot n -nel ($n \in \mathbb{N}$)! $\frac{1}{3}n + 0,6n + 2 = n$, amiből $n = 30$. Az osztályba 30 diák jár.

359. Anna pénze: $3x$ Ft, Bea pénze: $5x$ Ft. A pénz átadása után Annának $3x + 500$ Ft-ja, Beának $5x - 500$ Ft-ja lesz, így $\frac{3x + 500}{5x - 500} = \frac{2}{3}$, $x \neq 100$. Ebből $x = 2500$, azaz Annának 7500, Beának 12 500 Ft-ja volt eredetileg.

360. Az arány $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{6}{12} : \frac{9}{12} : \frac{10}{12} = 6 : 9 : 10$. A kilónkénti árak legyenek $6x$, $9x$ és $12x$ Ft! Így $3 \cdot 6x + 5 \cdot 9x + 10x = 2920$, amiből $x = 40$. Az alma egységára $240 \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$, a baracké $360 \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ és a szilváé $400 \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$.

361. Jelöljük az egyes helyiértékű számjegyet x -szel! A szám értéke $10(x+2) + x$. $11x + 20 = 7(2x+2)$, amiből $x = 2$. A keresett szám a 42.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

- 362.** Oldjuk meg a feladatot következtetéssel! Zoltán pénze mindennap a $\frac{2}{3}$ részénél 300 Ft-tal kevesebb lett. Így a harmadik nap elején $(700 + 300)\frac{3}{2} = 1500$, a második nap elején $(1500 + 300)\frac{3}{2} = 2700$, és induláskor $(2700 + 300)\frac{3}{2} = 4500$ Ft-ja volt.
- 363.** Legyen a középső testvér életkora x év! Ekkor a legfiatalabb $x - 2$, a legidősebb $4x - 8$ éves. $x - 2 + x + 4x - 8 = x + 10$, amiből $x = 4$. Az életkorok 2, 4 és 8 év.
- 364.** Legyen x az egyik láda alma tömege! $0,25x = \frac{1}{5}(180 - x)$. Az egyik rekeszben 80 kg, a másikban 100 kg alma van.
- 365.** x : az egyik gépsoron készített alkatrészek száma.
 $0,15x + 0,08(840 - x) = 98$, ebből $x = 440$. Az egyik gépsoron 374, a másikon 368 jó alkatrész készült.
- 366.** x : a DVD-k száma.
 $0,98x + 0,97(8200 - x) = 7984$, ebből $x = 3000$. A kazetták száma 5200, ami kb. 63,4%-a a filmeknek.
- 367.** a) 640 Ft-ot fizettünk. b) $200 \frac{\text{Ft}}{\text{kg}}$ az uborka egységára.
- 368.** A biciklis sebessége $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a motorosé $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. 2 h alatt 80 km-re lesznek egymástól.
- 369.** a) 18 nyúl, 9 kecske és 33 liba. b) 20 nyúl.
- 370.** 1 cm vastag a piskótatészta.
- 371.** 4 db döntetlen volt a héten.
- 372.** A kazetta 240 perces, ebből a két film hossza 120 és 96 perc, a rajzfilmé pedig 24 perc.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

373. Legyen az egyik üvegben x deciliter, a másikban $20 - x$ dl víz!

a) $x - 3 = 20 - x + 3$, ebből $x = 13$, azaz 13 dl és 7 dl víz van a két üvegben.

b) $x - 3 = 3(20 - x + 3)$, ebből $x = 18$, azaz 18 dl és 2 dl víz van az üvegekben;
vagy

$3(x - 3) = 20 - x + 3$, ebből $x = 8$, azaz 8 dl és 12 dl víz van az üvegekben.

c) $\frac{2}{3}x = 20 - x + \frac{1}{3}x$, ebből $x = 15$, azaz 15 dl és 5 dl víz van az üvegekben.

d) $\frac{3}{4}x = \frac{3}{2}\left(20 - x + \frac{1}{4}x\right)$, ebből $x = 16$, azaz 16 dl és 4 dl víz van az üvegekben.

374. Ha az eredeti hossz x cm, akkor $\frac{7}{8}x - \frac{1}{6}x - 7,5 = \frac{1}{3}x$, ebből $x = 20$.

Az eredeti gyertya 20 cm hosszú volt.

375. Legyen a könyv x oldalas!

a) $\frac{1}{3}x + 30 = \frac{1}{2}x - 1$, ebből $x = 186$.

A könyv 186 oldalas.

b) $\frac{1}{3}x + 30 = \frac{1}{2}x + 1$, ebből $x = 174$.

A könyv 174 oldalas

376. Az első CD-n $x - 15$, a másodikon $x + 70$, a harmadikon $\frac{x}{2}$, a negyediken pedig

$2x$ fájl van. $x - 15 + x + 70 + \frac{x}{2} + 2x = 1000$, amiből $x = 210$. Az egyes CD-ken 195, 280, 105, illetve 420 fájl van.

377.

negyed	hazai	vendég
1.	x	x
2.		$2x$
3.		$x - 5$
4.		$\frac{x}{2}$
Összesen	$5x$	$4,5x - 5$

$$5x - 13 = 4,5x - 5$$

$$0,5x = 8$$

$$x = 16$$

Ebből a hazai csapat pontjai $5x = 80$ a vendégek pontja $4,5x - 5 = 67$.

A végeredmény 80 : 67.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

378. Készítsünk táblázatot a fordulónként kapott pontokról!

	Éva	Bence	Nóra
1. pontozás:	x	$3x$	$x + 10$
2. pontozás:	68	$x + 13$	$x + 10$
3. pontozás:	$4x + 13$	77	$4x + 40$
Összes pont:	$5x + 81$	$4x + 90$	$6x + 60$

$$5x + 81 - (4x + 90) = (4x + 90) - (6x + 60), \text{ amiből } x = 13.$$

A játékban Éva 146, Bence 142, Nóra 138 pontot szerzett.

379. Legyen a fiú jelenlegi életkora x év, az apáé $4x$ év!

a) $4x + 4 = 3(x + 4) \Rightarrow x = 8$. A fiú 8 éves, az apa 32.

b) y év múlva az apa $32 + y$, a fia $8 + y$ éves lesz. $32 + y = 2(8 + y)$. Ebből $y = 16$.
16 év múlva lesz az apa kétszer annyi idős mint a fia.

380. Legyen Bence mostani életkora x év! Ekkor András $2(x - 7)$ éves.

a) $x - 7 + 10 = 2(x - 7) - 7$, így $x = 24$. Bence most 24 éves.

b) $3(x - 7) = 2(x - 7) + 12$, így $x = 19$. Bence most 19 éves.

c) $3(2x - 21) = x + 12$, így $x = 15$. Bence most 15 éves.

d) $3(2x - 21) = 15$, így $x = 13$. Bence most 13 éves.

381. Ha a tanárok létszáma x fő, akkor ebből $\frac{2}{5}x$ nő és $\frac{3}{5}x$ férfi.

a) A 30 éven aluli férfiak száma $0,24 \cdot \frac{5}{13}x$, a nőké $0,76 \cdot \frac{5}{13}x$.

A keresett arány:
$$\frac{\frac{3}{5}x - 0,24 \cdot \frac{5}{13}x}{\frac{2}{5}x - 0,76 \cdot \frac{5}{13}x} = \frac{3 \cdot 13 - 0,24 \cdot 25}{2 \cdot 13 - 0,76 \cdot 25} = \frac{33}{7}.$$

b) A 30 évnél fiatalabb nők száma 19.

c) 65 fő.

382. 2400 Ft a hajó egy napi kölcsönzési díja.

383. 20 kg körte és 15 kg alma volt ládanként.

384. Ha az eredeti ár x Ft, akkor a két árváltozás után $1,05 \cdot 0,9x = 945$. Az eredeti ár 1000 Ft.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

385. Évi $2x$, anyukája x óra alatt végezne egyedül. Egy óra alatt $\frac{1}{2x}$ -ed, illetve $\frac{1}{x}$ -ed részét végzik el a munkának. Fél óra alatt együtt az egész munkát elvégzik, így $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\right) = 1$, amiből $x = \frac{3}{4}$. Évi $\frac{3}{2}$ óra, azaz másfél óra alatt végezne egyedül.

386. Ha x az ügyetlenebb, $x + 2$ az ügyesebb titkárnő által óránként legépelte oldalak száma, akkor $2,5(x + 2) + 4x = 70$, ahonnan $x = 10$, tehát a két titkárnő 10, illetve 12 oldalt tud gépelni óránként.

387. Egy perc alatt a hidegvizes csap az $\frac{1}{10}$, a melegvizes csap az $\frac{1}{12}$ részét tölti meg a kádnak, a lefolyó pedig az $\frac{1}{6}$ részét engedi le. Jelöljük x -szel a kád megtöltéséhez szükséges időt percekben! $\frac{x}{10} + \frac{x}{12} - \frac{x}{6} = 1$, amiből $x = 60$, azaz 1 óra alatt feltölthető.

388. Az előzőek szerinti gondolatmenettel:

- a) $\frac{4}{3}$ óra, azaz 80 perc;
- b) $\frac{5}{3}$ óra, azaz 100 perc.

389. Az első és a második cső 9, a harmadik pedig 10 percig volt nyitva.

390. 6 óra alatt festették ki a házat.

391. 3 óra alatt telik meg a medence.

392. Az ötvözetben x g réz és 2 g tiszta arany van. $\frac{2}{x+2} = \frac{14}{24}$, amiből $x = \frac{10}{7}$.

393. 15 karátos aranyat kapunk.

394. 2 gramm.

395. 16%-os keveréket kapunk.

396. $\frac{300 \cdot 0,25}{500} = 0,15$, azaz 15 térfogat%-os alkoholt kapunk.

397. $\frac{4}{3}$ kg 15%-os cinktartalmú sárgaréz készíthető.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

398. Legyen az első ötvözet tömege x kg, a másiké $(150 - x)$ kg! Az első aranytartalma $\frac{2}{5}x$ kg, a másiké $0,32(150 - x)$ kg. Az ötvözetben $\frac{1}{3} \cdot 150 = 50$ kg arany lesz.

$$\frac{2}{5}x + 0,32(150 - x) = 50 \Rightarrow x = 25. \text{ A két ötvözetből 25 kg, illetve 125 kg kell.}$$

399. Jelöljük a sokszög csúcsinak számát n -nel ($n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1; 2\}$)! Az n oldalú sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$. Az egyenlet: $\frac{n(n-3)}{2} + 25 = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$, amiből $n = 13$.

A sokszög 13 oldalú.

400. Legyen a kapott négyzet oldala x cm! Ekkor a téglalapé $x + 3$ és $x - 2$.

$$(x+3)(x-2) = x^2, \text{ amiből } x = 6. \text{ A téglalap oldalai 9 cm és 4 cm hosszúak.}$$

401. Legyen a szár hossza b , az alapé ekkor $\frac{b}{3} + 1$! A kerület $\frac{b}{3} + 1 + 2b = 36$, amiből a szár 15, az alap 6 cm.

402. $\alpha = 4\varphi$; $4\varphi + 5\varphi + 4\varphi + 24^\circ = 180^\circ$. Ebből következően $\alpha = 48^\circ$, a másik két szög 60° és 72° .

403. Legyen az AB távolság x km! Ekkor a BC távolság $x - 150$ km. Az AB távot

$$\frac{x}{80}, \text{ a } BC \text{ távot pedig } \frac{x-150}{60} \text{ óra alatt tette meg a busz, ami összesen 4,5 óra.}$$

$$\frac{x}{80} + \frac{x-150}{60} = 4,5, \text{ ebből } x = 240. \text{ Így az } AC \text{ távolság 330 km.}$$

404. Jelöljük a keresett időket x -szel, illetve y -nal!

a) $8,5x - 7,5x = 400$, így $x = 400$;

b) $8,5y + 7,5y = 400$, így $y = 25$.

Ugyanabba az irányba futva 400, ellenkező irányban futva 25 percenként találkoznak.

405. A lovasok sebessége $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ és $25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

406. $\frac{s}{7,5} + 1 = \frac{s-6}{6} \Rightarrow s = 60$, azaz 60 m-es távon versenyeztek.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

407. Legyen v a hajó sebessége állóvízben! A folyón lefelé $(v+4) \frac{\text{km}}{\text{h}}$, felfelé $(v-4) \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a sebessége. Az út lefelé és felfelé egyenlő. $3(v+4) = 4,5(v-4)$, amiből $v = 20$.
A hajó sebessége állóvízben $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a két kikötő távolsága 72 km.

408. $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt a sebességünk az első két órában.

409. $x - A = B - x$
$$x = \frac{B + A}{2}.$$

410. $1,5v \cdot t - v \cdot t = d$, így $t = \frac{2d}{v}$.

6.5. Másodfokú egyenletek

411. a) $x_1 = x_2 = 0$; $x_1 = 1, x_2 = -1$; $x_1 = 9, x_2 = -9$; $x_1 = 3, x_2 = -3$;

b) $x_1 = 3, x_2 = -3$; $x_1 = 5, x_2 = -5$.

c) $|x-3|=11, x-3=11$ vagy $x-3=-11, x_1=14, x_2=-8$;

$|x+7|=8, x+7=8$ vagy $x+7=-8, x_1=1, x_2=-15$;

d) $2x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, ebből $x_1 = \frac{1}{2}$ vagy $2x + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$, ebből $x_2 = -1$;

$\frac{x}{5} - 2 = \frac{1}{5}$, ebből $x_1 = 11$ vagy $\frac{x}{5} - 2 = -\frac{1}{5}$, ebből $x_2 = 9$;

e) mivel $x^2 < 0$, ezért nincs megoldás;

f) $x(3x-1)=0$, ebből $x_1=0, x_2=\frac{1}{3}$;

$16x^2 - 2x = 2x(8x-1)=0$, ebből $x_1=0, x_2=\frac{1}{8}$;

g) $x_1=0, x_2=5$; $x_1=0, x_2=-7$;

h) $(x-1)^2=0$, ebből $x=1$; $(2x-1)^2=0$, ebből $x=\frac{1}{2}$; $2(x+3)^2=0$, ebből $x=-3$.

412. A rendezés után hiányos egyenletekhez jutunk, amelyek szorzattá alakítással megoldhatók.

a) $x^2 - x = 0$, ebből $x(x-1)=0$, ebből $x_1=0, x_2=1$;

b) $-5x^2 + 5 = 0$, ebből $x_1=1, x_2=-1$;

c) $7x^2 + 22 = 0$, aminek nincs megoldása;



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

- d) $3x^2 - 7x = 0$, ebből $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{7}{3}$;
 e) $x^2 - 4 = 0$, ebből $x_1 = 2$, $x_2 = -2$;
 f) $11x^2 - 15x = 0$, ebből $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{15}{11}$;
 g) $6x^2 + 9 = 0$, aminek nincs megoldása.

413. Alakítsuk szorzattá az egyenletek bal oldalát!

- a) $(x-5)^2 = 0$, ebből $x = 5$;
 b) $(x+1)^2 - 9 = (x+1+3)(x+1-3) = (x+4)(x-2) = 0$, ebből $x_1 = -4$, $x_2 = 2$;
 c) $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = \left(x + \frac{7}{2} + \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\right) = (x+6)(x+1) = 0$, $x_1 = -6$, $x_2 = -1$;
 d) $\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-3) = 0$, ebből $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 3$;
 e) $8\left(x^2 - \frac{14}{8}x + \frac{3}{8}\right) = 8\left[\left(x - \frac{7}{8}\right)^2 - \frac{25}{64}\right] = 8\left(x - \frac{7}{8} + \frac{5}{8}\right)\left(x - \frac{7}{8} - \frac{5}{8}\right) =$
 $= 8\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$, ebből $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{2}$;
 f) $(3x+2)^2 = 0$, ebből $x = -\frac{2}{3}$;
 g) $4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0$, aminek nincs megoldása.

414. Használjuk a megoldóképletet!

- a) $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$, ebből $x_1 = 3$, $x_2 = 5$;
 b) $x_1 = -5$; $x_2 = -2$;
 c) $x_1 = 3$; $x_2 = -4$;
 d) $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{2}{5}$;
 e) nincs megoldás, mert a diszkrimináns negatív;
 f) $x_1 = \frac{3}{4}$; $x_2 = \frac{1}{4}$;
 g) $x_1 = -\frac{3}{4}$; $x_2 = 8$.

415. Rendezzük az egyenleteket, majd oldjuk meg a megoldóképlettel!

- a) $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{5}{2}$;



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

- b) $-x^2 + 3x - 7 = 0$ $D = -19$, ezért nincs megoldás;
- c) $6x^2 + 7x - 13 = 0$, ebből $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{13}{6}$;
- d) $x^2 + 2x + 1 = 0$, ebből $x = -1$;
- e) $5x^2 - 19x - 4 = 0$, ebből $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{1}{5}$;
- f) $x^2 + 6x + 8 = 0$, ebből $x = -4$, a másik gyök nem eleme az alaphalmaznak;
- g) $10x^2 + 7x - 3 = 0$, ebből $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{10}$;
- h) $x^2 + 2x - 3 = 0$, ebből $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.
- 416.** Egy törtkifejezés értéke csak akkor 0, ha a számláló értéke 0 (és a nevező nem 0).
- a) alaphalmaz: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nincs megoldás;
- b) alaphalmaz: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$, nincs megoldás;
- c) alaphalmaz: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{7}\right\}$, $x = -\frac{9}{2}$.
- 417.** Az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk a közös nevezővel, majd rendezzük az egyenletet. Figyeljünk az alaphalmazra!
- a) $x^2 = 36$, ebből $x_1 = +6$, $x_2 = -6$; $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- b) $(x+3)^2 = 16$, ebből $x_1 = 1$, $x_2 = -7$; $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
- c) $(2-7x)^2 = 15$, ebből $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{15}}{7}$; $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{7}\right\}$.
- d) $(5x-1)^2 = -21$, nincs megoldás; $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\}$.
- e) $x^2 + 9 = 0$, nincs megoldás; $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.
- f) $6x^2 + 7x - 13 = 0$, ebből $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{13}{6}$; $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$.
- 418.** Szorozzunk be a közös nevezővel, majd rendezzük az egyenletet! Figyeljünk az alaphalmazra!
- a) $(2x-1)(x+2) = x(x+4) \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -1 \notin \mathbb{N}; D = \mathbb{N}$;
- b) $x + x + 1 = x(x+1) \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Z}$, nincs megoldás;
 $D = \mathbb{Z} \setminus \{0; -1\}$;
- c) $x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 5; x_2 = -1; D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 2\}$;
- d) $4[(x+3)^2 + (x-3)^2] = 17(x+3)(x-3) \Rightarrow x_1 = 5; x_2 = -5 \notin \mathbb{N}; D = \mathbb{N} \setminus \{3\}$;
 másként is megoldhatjuk: új ismeretlent bevezetve $\frac{x+3}{x-3}$ helyett...



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

e) $x(2x+1)-(2x-1)=4 \Rightarrow 2x^2-x-3=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=\frac{3}{2} \notin \mathbb{R}^-;$

$D=\mathbb{R}^-\setminus\{3\};$

f) $2x-(x+2)+(x-4)(x-2)=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x_1=3; D=\mathbb{Z}^+\setminus\{2\},$
 $x_2=2$, ami nem eleme a $\mathbb{Z}^+\setminus\{2\}$ alaphalmaznak;

g) $x_1=3$ hamis gyök, $x_2=-\frac{1}{6} \notin \mathbb{R}^+; D=\mathbb{R}^+\setminus\{3\};$

h) $7(9x^2-1)-6x(3x+1)=48-8(3x-1) \Rightarrow 5x^2+2x-7=0; D=\mathbb{Z},$
 $x_1=1, x_2=-\frac{7}{5} \notin \mathbb{Z}.$

419. a) $x_1=3, x_2=-3;$ b) $x_1=2, x_2=-2;$ c) nincs megoldás; d) $x_1=0; x_2=1, x_3=-1;$

e) $x_1=0; x_2=3, x_3=-3;$ f) nincs megoldás; g) $x=\sqrt[3]{3};$ h) $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{1}{2}.$

420. Vezessük vissza másodfokú egyenletre!

a) $(x^2)^2-13x^2+36=0 \Rightarrow (x^2)_1=9; (x^2)_2=4 \Rightarrow x_1=3, x_2=-3; x_3=2, x_4=-2;$

b) $x_1=\sqrt{5}, x_2=-\sqrt{5};$

c) $x_1=\sqrt{2}; x_2=-\sqrt{2}; x_3=\frac{1}{2}; x_4=-\frac{1}{2};$

d) $(x^3)^2+x^3-72=0 \Rightarrow (x^3)_1=8; (x^3)_2=-9 \Rightarrow x_1=2, x_2=-\sqrt[3]{9};$

e) $x=-\frac{1}{2}.$

421. Vezessünk be új ismeretlent, és oldjuk meg a kapott másodfokú egyenletet!

a) Legyen $y=(x+1)^2$! Ezzel $y^2-2y-3=0$. Ebből $y_1=3$ és $y_2=-1$. Mivel $y \geq 0$, ezért $(x+1)^2=3$ lehet csak, amiből $x_1=-1+\sqrt{3}, x_2=-1-\sqrt{3};$

b) Legyen $y=x^2-4x$! Ezzel $y^2+7y+12=0$. Ebből $y_1=-3$ és $y_2=-4$. Ha $x^2-4x=-3$, akkor $x_1=3, x_2=1$. Ha $x^2-4x=-4$, akkor $x_3=2;$

c) $y=x^2+4x$, a megoldások: $x_1=-5; x_2=1; x_3=-2+\sqrt{2}, x_4=-2-\sqrt{2};$

d) $y=x^2+x$, a megoldások: $x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2};$

e) $y=x^2-x$, a megoldások: $x_1=2, x_2=-1;$

f) $y=x^2-2x$, nincs megoldás;

g) $y=x^2-\frac{5}{2}x-1$, a megoldások: $x_1=3; x_2=-\frac{1}{2}; x_3=0; x_4=\frac{5}{2}.$

422. Használjuk fel, hogy ha $y=x+\frac{1}{x}$, akkor $y^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2!$



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

a) $2(y^2 - 2) = y + 2 \Rightarrow 2y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow y_1 = 2, y_2 = -\frac{3}{2}; D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Ha $x + \frac{1}{x} = 2$, akkor $x = 1$. Az $x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{2}$ egyenletnek nincs megoldása.

b) $x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4} \Rightarrow x_1 = 4; x_2 = \frac{1}{4}; x + \frac{1}{x} = -2 \Rightarrow x_3 = -1; D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

c) $y = x + \frac{3}{x}$ helyettesítéssel $2(y^2 - 6) - 13y + 12 = 0$ egyenletet kapjuk.

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Ennek megoldásai $y_1 = 0, y_2 = \frac{13}{2}$, amiből $x_1 = 6$ és $x_2 = \frac{1}{2}$.

d) Osszuk el az egyenletet x^2 -tel! A 0 nem megoldása az egyenletnek.

$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$, amit a fenti helyettesítéssel megoldhatunk.

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = \frac{3}{2}.$

423. Használjuk a másodfokú polinom gyöktényezős alakját!

a) $(x - 2)(x - 5) = 0$, ebből $x^2 - 7x + 10 = 0$;

b) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 4) = 0$, ebből $x^2 + \frac{7}{2}x - 2 = 0$;

c) $x(x + 7) = 0$, ebből $x^2 + 7x = 0$;

d) $x^2 + \frac{25}{12}x + 1 = 0$;

e) $x^2 - 3 = 0$;

f) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0.$

424. A $2x^2 + x - 1 = 0$ egyenlet megoldásai $x_1 = \frac{1}{2}$ és $x_2 = -1$. A keresett egyenlet megoldásai $x'_1 = \frac{5}{2}$ és $x'_2 = 1$. Ebből $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

425. Keressük meg a kifejezések zérushelyeit, és írjuk fel a gyöktényezős alakot!

a) $(x - 3)(x - 2)$;

b) $(x + 3)(x + 5)$;

c) $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3) = (2x - 1)(x - 3)$;



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

$$d) -(x+3)\left(x-\frac{1}{3}\right) = (x+3)\left(\frac{1}{3}-x\right);$$

$$e) (x+2\sqrt{2})(x-\sqrt{2});$$

$$f) 4\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) = (2x-\sqrt{3})(2x+1).$$

426. Az előbbieket szerint alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt, majd egyszerűsítsük a törtet!

$$a) \frac{2(x+3)}{(x-5)(x+3)} = \frac{2}{x-5}, \text{ ahol } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 5\};$$

$$b) \frac{(x+6)(x+2)}{x(x+2)} = \frac{x+6}{x}, \text{ ahol } x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -2\};$$

$$c) \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(2x+1)} = \frac{x+2}{2x+1}, \text{ ahol } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{2; -\frac{1}{2}\right\};$$

$$d) \frac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)}{-3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)} = \frac{x-3}{1-x}, \text{ ahol } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}; 1\right\};$$

$$e) \frac{9\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+5)}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+5)} = \frac{9x-6}{4x+2}, \text{ ahol } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; -5\right\}.$$

427. Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek egy megoldása van, ha $a = 0$, vagy ha $a \neq 0$ és a diszkrimináns 0.

a) Az $x^2 + (2m+3)x + m^2 + 5m - 3 = 0$ egyenlet másodfokú. Egy megoldás van, ha

$$D = (2m+3)^2 - 4(m^2 + 5m - 3) = -8m + 21 = 0, \text{ amiből } m = \frac{21}{8} \quad (m \in \mathbb{Q}).$$

b) Rendezés után a $3x^2 + (2m-1)x + m - 5 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek diszkriminánsa $4m^2 - 16m + 61$, ami semmilyen m esetén nem 0. Az egyenletnek bármely m esetén két megoldása van.

c) Az $mx^2 + (m-2)x + m - 3 = 0$ egyenlet $m = 0$ esetben elsőfokú, aminek egy megoldása van. Ha $m \neq 0$, akkor az egyenlet másodfokú. Ennek a diszkriminánsa



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

$D = (m-2)^2 - 4m(m-3) = -3m^2 + 8m + 4$, ami $m = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{3}$ esetben 0. A fenti

m értékek nem racionális számok, így csak $m = 0$ felel meg a feltételeknek.

d) $m = -2$, $m = -\frac{3}{2}$ vagy $m = 2$ esetben lesz egy megoldása az egyenletnek.

428. Az egyenlet diszkriminánsa pozitív, így két különböző valós megoldása van. Használjuk fel az $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ Viéte-formulákat!

a) $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$;

b) $x_1 x_2 = \frac{5}{2}$;

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{7}{5}$;

d) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} = \frac{29}{4}$.

429. Ha $x_1 = \frac{1}{x_2}$, akkor $x_1 x_2 = 1$ és $D \geq 0$. Az első feltételből $\frac{p-7}{3} = 1$, azaz $p = 10$, ami a másik feltételnek is eleget tesz.

430. Rendezés után a $px^2 - (p+1)x + 3 - 2p = 0$ egyenlethez jutunk, aminek csak $p \neq 0$ esetben lehet két különböző megoldása. Az egyenlet diszkriminánsa

$D = (p+1)^2 - 4p(3-2p) = 9p^2 - 10p + 1$, ami csak $p < \frac{1}{9}$, vagy $p > 1$ esetben pozitív.

a) $x_1 = -x_2$, így $x_1 + x_2 = 0$, amiből $p = -1$.

b) $x_1 > 0$ és $x_2 > 0$, így $x_1 + x_2 > 0$ és $x_1 x_2 > 0$. Ezekből p -re a következő feltételeket kapjuk: $\frac{p+1}{p} > 0$ és $\frac{3-2p}{p} > 0$. Ezekből $0 < p < \frac{3}{2}$ adódik. Tehát $0 < p < \frac{1}{9}$ vagy $1 < p < \frac{3}{2}$ esetben lesz két pozitív gyök.

c) $x_1 < 0$ és $x_2 < 0$, így $x_1 + x_2 < 0$ és $x_1 x_2 > 0$. Ezekből $\frac{p+1}{p} < 0$ és $\frac{3-2p}{p} > 0$.

Nincs olyan p valós szám, ami a fentieknek megfelel.

d) Az $x_1 x_2 > 0$ feltételnek megfelelő p értékek: $0 < p < \frac{3}{2}$. Így akkor lesz két azonos előjelű gyök, ha $0 < p < \frac{1}{9}$ vagy $1 < p < \frac{3}{2}$.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

431. Az egyenlet diszkriminánsa $D = 5$, így van két különböző valós megoldás. Ezekre teljesül az $x_1 + x_2 = 3$ és $x_1 x_2 = 1$ összefüggés.

a) A keresett egyenlet gyökei $x'_1 = 3x_1$; $x'_2 = 3x_2$. Írjuk fel ezekre is a Viéte-formulákat, amiből az egyenlet együtthatói meghatározhatóak!

$x'_1 + x'_2 = 3(x_1 + x_2) = 9$; $x'_1 x'_2 = 9x_1 x_2 = 9$; ezekből a' -t 1-nek választva $b' = -9$ és $c' = 9$ adódik. A keresett egyenlet: $x^2 - 9x + 9 = 0$.

b) Az előző gondolatmenettel $x^2 - 9x + 19 = 0$ egyenletet kapunk.

432. Az $x_1 + x_2 = -p$ és $x_1 x_2 = q$ összefüggéseket felhasználva, a $p^2 - 4q \geq 0$ feltétel mellett:

a) $3(x_1 + x_2) = -3p$;

b) $-4q$;

c) $x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -pq$;

d) $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{p^2 - 2q}{q}$, ha $x_1 \neq 0$ és $x_2 \neq 0$;

e) $(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2] = (-p)(p^2 - 3q)$;

f) $(x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \pm(2pq - p^3)\sqrt{p^2 - 4q}$.

433. a) Behelyettesítve a megoldást az egyenletbe: $p = -6$;

b) $D = p^2 - 4 \cdot 9 \geq 0$, ahonnan $|p| \geq 6$, amiből $p_1 = 6$, $p_2 = -6$;

c) $x_1 + x_2 = -p = -8$ ebből $p = 8$, ami valóban megfelel a feltételeknek;

d) $x_1 x_2 = 9 \neq 6$, ebből nincs ilyen p .

434. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$, ebből $p = \frac{11}{3}$, ami a $D \geq 0$ feltételnek is megfelel.

435. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (2p + 1)^2 - 4p = 17$, ahonnan $p_1 = 2$, $p_2 = -1$, ami a $D \geq 0$ feltételnek is megfelel.

436. A főegyüttható nem lehet 0. $D > 0$ miatt a) $p > -\frac{9}{2}$; b) $p \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; c) 0-ra redukálás után. $p \in \left[\frac{1}{2}; \infty\right] \setminus \{1\}$

437. $x_2 = 3x_1$ behelyettesítéssel a Viéte-formulákból $c = 3$ adódik, ami a $D \geq 0$ feltételnek is megfelel.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

438. a) $D > 0$, ezért $p < \frac{9}{2}$;
 b) $x_1 x_2 < 0$ és $D > 0$, ezért $p < 0$;
 c) $x_1 x_2 = 1$ és $D \geq 0$, ezért $p = 2$.
439. a) $D = 0$, vagy $p + 3 = 0$, ezért $p = -5; -3$;
 b) $D \leq 0$, vagy $p + 3 = 0$, ezért $p \leq -5$ vagy $p = -3$;
 c) $x_1 + x_2 = 0$ és $D \geq 0$, ezért $p = -1$.
440. a) $x_{1,2} = \frac{2 - p \pm \sqrt{(p-2)^2 - 4 \cdot (-2p)}}{2} = \frac{2 - p \pm (p+2)}{2}$, ahonnan $x_1 = 2$ és $x_2 = -p$
 bármely $p \in \mathbb{R}$ esetén;
 b) rendezés után $0 = x(x-3a)$, ahonnan $x = 0$ vagy $x = 3a$ bármely $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén, ha $a = 0$, akkor nincs megoldás;
 c) x -re rendezve az egyenletet $a = 0$ és $b \neq 0$ esetén $x = -1$; $a \neq 0$ esetén a megoldóképletből $x_{1,2} = \frac{b}{a}$; -1 , illetve $a = b = 0$ esetén azonosságot kapunk, így minden valós szám megoldás.
441. Ha $m = -2$, akkor az egyenlet nem másodfokú. $D \geq 0$ esetén a $2m^2 - m - 6 \geq 0$ másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk, megkeresve a bal oldali kifejezés zérushelyeit grafikus előjelvizsgálattal $m \leq -\frac{3}{2}$ vagy $2 \leq m$ adódik.
442. Az előző feladathoz hasonlóan $\frac{1}{9} < p < 1$.
443. 0-ra redukálás után az előzőkhöz hasonlóan $m \leq -3 - 2\sqrt{3}$ vagy $-3 + 2\sqrt{3} \leq m$.
444. Legyen x a keresett szám! $\frac{x}{A} = \frac{B}{x}$, ebből $x = \sqrt{A \cdot B}$.
445. A szakasz két részét x -szel és $10 - x$ -szel jelölve $\frac{x}{10-x} = \frac{10-x}{10}$, ahonnan csak az $x \approx 3,82$ a jó megoldás, azaz a szakaszt $3,82$ és $6,18$ cm hosszú részekre osszuk fel!
446. x -szel jelölve a konyha szélességét $x^2 \cdot 1,1 = 8 \cdot 1,2$, így a konyha $295 \text{ cm} \times 295 \text{ cm}$ -es.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

447. n -nel jelölve az oldalak számát az átlók száma $\frac{n(n-3)}{2}$, így a feladat állításából $n = 8$ adódik, azaz 8 oldalú a sokszög.
448. A sokszögek oldalainak száma n és $n + 3$, így az előző feladat alapján az állítás $2 \cdot \frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n+3)n}{2}$, ahonnan $n = 9$, a sokszög tehát 9 oldalú.
449. $x(x-1) = 380$, ahol x a csapatok száma. 20 csapat vett részt a bajnokságban.
450. A résztvevők száma legyen x ! Az állítás szerint $\frac{x(x-1)}{2} = 351$, így 27-en voltak az osztálytalálkozón.
451. Hasonlóan az előző feladathoz: 6 fiú van az osztályban.
452. x -szel jelölve a turnusok napjainak számát a 132 nap alatt a turnusok száma $\frac{132}{x}$.
A feladat állítása $\frac{132}{x} - 10 = \frac{132}{x+5}$, melyből a turnusok hosszára 6 nap adódik.
453. 30-an vettek részt a kiránduláson.
454. 15 óra alatt gépelte le a szöveget.
455. Legyen x az egyik munkás egyedüli munkaideje, $x+5$ a másik munkásé! 1 nap alatt az egyik munkás a munka $\frac{1}{x}$ részét, a másik az $\frac{1}{x+5}$ részét végzi el, 6 nap alatt pedig ennek a 6-szorosát. Együtt dolgozva $\frac{6}{x} + \frac{6}{x+5} = 1$, ahonnan $x = 10$, tehát a munkások 10, illetve 15 nap alatt végzik el a munkát egyedül.
456. Legyen x óra és $x+1$ óra a gyalogosok menetideje. Így a sebességük $\frac{24}{x} \frac{\text{km}}{\text{h}}$, illetve $\frac{24}{x+1} \frac{\text{km}}{\text{h}}$. A sebességekre vonatkozó állításból x -re 3 óra adódik, melyből a gyalogosok sebessége $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ és $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

457. Ha $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a csónak sebessége állóvízben, akkor a folyón lefelé $x + 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a folyón felfelé $x - 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a parthoz viszonyított sebesség. Ezekből a menetidő lefelé $\frac{20}{x+3}$ óra, felfelé $\frac{20}{x-3}$ óra. A feladat állításából x -re $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ adódik.

458. A 452–453. feladatokhoz hasonlóan oldható meg. A nézőtér 15 soros.

459. a) $12000 \cdot \frac{100-p}{100} \cdot \frac{100-(p-5)}{100} = 9180$, ahonnan $p=15$ felel meg a feladat szövegének, azaz 15%-os, majd 10%-os volt a leértékelés.

b) $\frac{9180}{12000} = 0,765$, azaz 23,5%-kal lett olcsóbb.

460. Jelöljük x -szel az út szélességét! A park területe $22 \cdot 80 \text{ m}^2$, míg az úté $(22+2x)(80+2x) - 22 \cdot 80$. A rájuk vonatkozó állításból az út szélessége 4 méter.

461. A háromszög alapja x , szárai $x+3$ cm hosszúságúak, így a Pitagorasz-tételt felírva $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 12^2 = (x+3)^2$, ahonnan $x=10$. Tehát a háromszög kerülete 36 cm.

462. Az előzőhöz hasonlóan a háromszög befogói $3+3\sqrt{2}$ egység, átfogója $6+3\sqrt{2}$ egység.

463. A háromszög befogói 9 és 12 cm hosszúságúak, így a területe 54 cm^2 .

464. Legyen x cm a legkisebb kocka élhossza! Így a feladat állítása $x^3 + 335 = (x+5)^3$, melyből $x=2$ adódik. A kockák magassága 2, 3, 4, 5, 6 és 7 cm, a torony magassága pedig ezek összege, azaz 27 cm.

465. A számrendszer fogalma alapján egy x -alapú számrendszerben a helyiértékek hátulról indulva 1, x , x^2 , x^3 , ... stb.

a) $x^2 + 3x = 28$, ahonnan $x=4$, tehát a 4-es számrendszerben igaz a kijelentés;

b) 7-es számrendszerben;

c) 8-as számrendszerben (Magyarországon a hálózati feszültség értéke 230 V!).



6.6. Négyzetgyökös egyenletek

466. a) $x=0$ és $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; $x=5$ és $x \in [5; \infty[$;
 b) nincs megoldás és $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; nincs megoldás és $x \in \left[-\frac{1}{3}; \infty\right[$;
 c) nincs megoldás (mert nincs olyan x , hogy mindkét tag 0 legyen) és $x \in [7; \infty[$;
 $x = \frac{1}{2}$ és $x \in \left[\frac{1}{2}; \infty\right[$;
 d) $x=16$ és $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; $x=79$ és $x \in [-2; \infty[$; $x=19$ és $x \in [3; \infty[$;
 e) a lehető legbővebb alaphalmaz üreshalmaz, ezért nincs megoldás;
 f) a lehető legbővebb alaphalmaz egyetlen elemű, $x \in \{0\}$, és a 0 megoldás is;
 g) a lehető legbővebb alaphalmaz egyetlen elemből áll, $x \in \{13\}$, de a 13 nem megoldás, azaz nincs megoldás;
 h) a lehető legbővebb alaphalmaz egyetlen elemű, $x \in \left\{\frac{3}{2}\right\}$, de a $\frac{3}{2}$ nem megoldás, azaz nincs megoldás.

467. Emeljük négyzetre az egyenletek mindkét oldalát! (Nem ekvivalens átalakítás, ezért ellenőrizzük a megoldásokat!)

- a) $x = \frac{4}{3}$; b) nincs megoldás; c) $x=3$; d) nincs megoldás; e) $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$.

468. a) Négyzetre emelés, majd 0-ra redukálás után szorzattá alakítva $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.
 Alaphalmaz és értékkészlet vizsgálat alapján:

- b) $x=4$; c) nincs megoldás; d) $x=1$; $\frac{7}{9}$; e) nincs megoldás; f) $x=0$;
 g) $x = \frac{33}{25}$;
 h) $(5x-3)(x-5) = x^2 + 2x + 1$, melynek 0-ra redukálás után a megoldása $x=7$;
 i) $x + 2\sqrt{x(x-1)} + x - 1 = 1$, melyet rendezve, majd újra négyzetre emelve
 $x^2 - x = 1 - 2x + x^2$, ahonnan $x=1$;
 j) nincs megoldás; k) $x=1$; 3; l) $x=2$; m) $x=5$; n) $x = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$; o) $x=0$;
 p) $x=3$.

469. a) Négyzetre emelés után $x + \sqrt{x-3} = 9$, rendezve, majd újra négyzetre emelve és 0-ra redukálva $0 = x^2 - 19x + 84$, ahonnan csak az $x=7$ a jó megoldás;



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

- b) kétszeri négyzetre emeléssel, majd 0-ra redukálással $x = 1 + \sqrt{2}$ csak a jó megoldás;
 c) a lehető legbővebb alaphalmaz üreshalmaz, ezért nincs megoldás;
 d) $x = 3$; e) $x = 2$; f) $x = \frac{2}{5}$.

6.7. Abszolút értékű egyenletek

- 470.** a) $x = 0$; b) nincs megoldás; c) $x = -4$; d) $x_1 = 8, x_2 = -8$;
 e) $x - 5 = 7, x - 5 = -7$, ahonnan $x_1 = 12, x_2 = -2$;
 f) $x + 5 = 2, x + 5 = -2$, ahonnan $x_1 = -7, x_2 = -3$;
 g) $x_1 = -3, x_2 = \frac{5}{2}$; h) $x_1 = -\frac{9}{2}, x_2 = \frac{15}{2}$; i) $4 = 2|x|$, ahonnan $x_1 = 2, x_2 = -2$;
 j) $x_1 = 2, x_2 = -2$; k) $x_1 = -3, x_2 = -2$.
- 471.** Definíció szerint:
 a) Minden nemnegatív valós szám megoldás; minden nempozitív valós szám megoldás; b) $x \in [-17; \infty[$; c) $x \in]-\infty; \frac{11}{2}]$;
 d) A definíció alapján felbontjuk az abszolútértékjelet: ha $x < 9$, akkor $9 - x = x - 2$, melyből $x = \frac{11}{2}$, ami benne van a tartományban, tehát jó megoldás, ha pedig $9 \leq x$, akkor $x - 9 = x - 2$, ami ellentmondás, tehát ezen a tartományon nincs megoldás;
 e) $x = -2; 1$; f) $x = -4; 8$.
- 472.** a) $x = 0$; b) $x_1 = 1; x_2 = 5$; c) nincs megoldás; d) $x = -1$.
- 473.** a) nincs megoldás, mert nincs olyan x , hogy mindkét tag egyszerre 0 legyen;
 b) ha $x \leq -3$, akkor $-x - 3 + 1 - x = 4$, melyből $x = -3$ jó megoldás, ha $-3 < x \leq 1$, akkor $x + 3 + 1 - x = 4$, mely azonosság, tehát a tartomány minden eleme megoldás, ha $1 < x$, akkor $x + 3 - 1 + x = 4$, melyből $x = 1$ már megoldás. Egyesítve a megoldásokat: $-3 \leq x \leq 1$;
 c) $x = -2$; d) $x_1 = 2, x_2 = -2$; e) $x \leq -1$; f) $x_1 = -1, x_2 = 2$; g) $x_1 = -6, x_2 = -2$.
- 474.** a) $x - p = 3$, amiből $x = p + 3$ vagy $x - p = -3$, amiből $x = p - 3$ bármely valós p paraméter esetén;
 b) $x = -2 + p$ vagy $x = -2 - p$, ahol $p \geq 0$, és $p < 0$ esetén nincs megoldás;



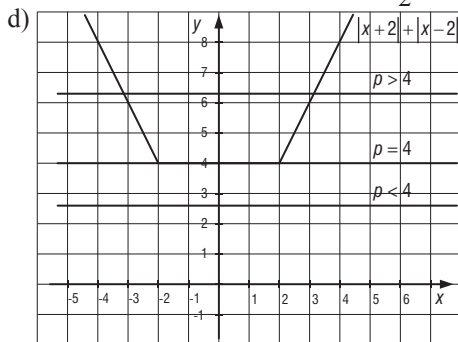
6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

c) ábrázolva az egyenlet mindkét oldalát:

– ha $-p < 1$, azaz $-1 < p$, akkor $x = \frac{-p+1}{2}$,

– ha $p = -1$, akkor azonosság, tehát minden valós szám megoldás,

– ha $p < -1$, akkor szintén $x = \frac{-p+1}{2}$;



grafikus megoldás alapján:

– ha $p < 4$, akkor nincs megoldás,

– ha $p = 4$, akkor minden $x \in [-2; 2]$ megoldás,

– ha $4 < p$, akkor $x_1 = \frac{p}{2}$, $x_2 = -\frac{p}{2}$.

475. a) $|x-3|-2 = \pm 1$, ahonnan $|x-3| = 3$, vagy $|x-3| = 1$, így két-két megoldást kapunk:

$x_1 = 6$; $x_2 = 0$; $x_3 = 4$; $x_4 = 2$;

b) nemnegatív x -ekre $x^2 = 16$, ahonnan csak az $x = 4$ jó megoldás, negatív x -ekre pedig nincs megoldás;

c) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$; d) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -3$.

6.8. Az egyenlőtlenségekről

476. a) $0 < x$; b) $1 \geq x$; c) $x > -\frac{1}{3}$; d) $-4 > x$; e) $8 > x$; f) $-10 \leq x$; g) $x < \frac{18}{13}$;

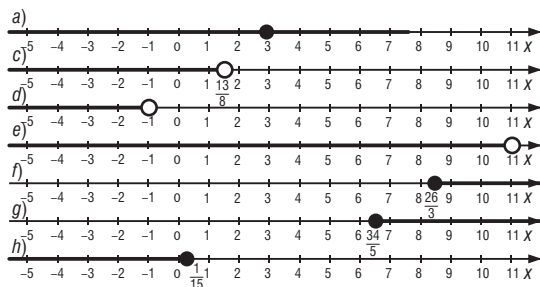
h) $\frac{13}{2} \leq x$; i) $-\frac{21}{20} \leq x$.



6. ÉGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

477. Bontsuk fel a zárójeleket, majd végezzük el az összevonásokat!

- a) $3 \geq x$; b) nincs megoldás; c) $x < \frac{13}{8}$; d) $-1 > x$; e) $11 > x$; f) $\frac{26}{3} \leq x$;
g) $\frac{34}{5} \leq x$; h) $\frac{1}{15} \geq x$.

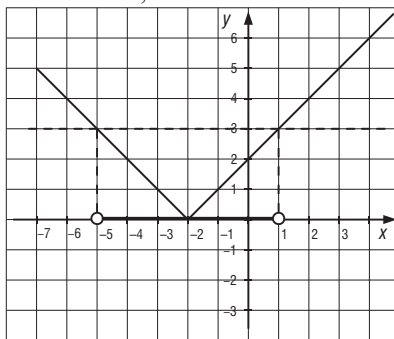


478. A mérlegelv segítségével:

- a) $-2 < x < 3$; b) $-1 < x \leq 2$; c) $5 \geq x \geq -2$; d) $-1 < -4x < 8$, ahonnan $\frac{1}{4} > x > -2$.

479. a) nincs megoldás; b) $x \in \mathbb{R}$;

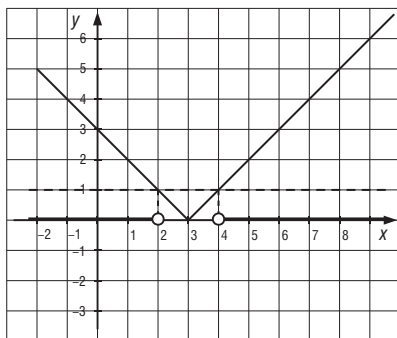
- c) $-3 < x + 2 < 3$, melyből $-5 < x < 1$;



- d) $2 < x < 12$; e) $3 - x \leq -1$, azaz $4 \leq x$, vagy $1 \leq 3 - x$, azaz $x \leq 2$;



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK



f) $4 \geq x \geq -1$; g) $x \leq -\frac{7}{2}$ vagy $-\frac{5}{2} \leq x$; h) $x \leq \frac{1}{10}$ vagy $\frac{9}{10} \leq x$; i) $\frac{19}{2} > x > -\frac{7}{2}$.

480. a) $x \leq 1$;

b) ha $x \leq 4$, akkor $4 - x < 2x$, melyből $\frac{4}{3} < x$, de a tartomány miatt csak a $\frac{4}{3} < x \leq 4$ megoldások jók, ha $4 < x$, akkor $x - 4 < 2x$, melyből $-4 < x$, de a tartomány miatt csak a $4 < x$ megoldások jók, egyesítve tehát a megoldások: $\frac{4}{3} < x$;

c) $x \in \mathbb{R}$;

d) $-4 < x < 0$;

e) $-\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$;

f) $-\frac{7}{2} < x$;

g) három tartományra felbontva az alaphalmazt, majd a tartományonkénti megoldásokat egyesítve $x \leq -\frac{11}{2}$ vagy $-1 \leq x$;

h) $x < -3$ vagy $-1 < x$;

i) $|x - 5| - 3 \leq -2$ vagy $2 \leq |x - 5| - 3$, melyek megoldásait egyesítve $x \leq 0$ vagy $4 \leq x \leq 6$ vagy $10 \leq x$.

481. $x = -1$

482. a) nincs megoldás; $x = 0$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; minden valós szám megoldás.

b) csak az egyenlőség teljesülhet, így $x = -2$; minden valós szám megoldás.

c) a bal oldalnak megfelelő függvény zérushelyei szorzattá alakítással -1 és 0 , majd előjelvizsgálattal a megoldások $x \leq -1$ vagy $0 \leq x$;

d) 0 -ra redukálunk, majd szorzattá alakítunk, hogy megállapítsuk a függvény zérushelyeit, végül grafikus előjelvizsgálattal kapjuk a megoldásokat: $0 \leq x \leq 7$;



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

Az előzőkhöz hasonlóan:

- e) $0 < x < \frac{3}{2}$; f) nincs megoldás, mert a bal oldal bármely x esetén pozitív értékű;
 g) $-11 \leq x \leq 11$; h) $x < -5$ vagy $5 < x$; i) $x \leq -\frac{5}{2}$ vagy $\frac{5}{2} \leq x$;
 j) $x < 0$ vagy $\frac{2}{3} < x$; k) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; l) $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; m) $-4 < x < 0$; n) $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{4}$.

483. Ahol szükséges, először 0-ra redukálunk, majd szorzattá alakítással, vagy a megoldóképlet segítségével megállapítjuk a függvények zérushelyeit, végül előjelvizsgálattal megadjuk a megoldásokat:

- a) $x < 1$ vagy $3 < x$; b) $x \in \mathbb{R}$; c) $-1 < x < \frac{2}{3}$; d) $x = -\frac{3}{2}$; e) $-\frac{1}{3} \leq x \leq 2$;
 f) $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$; g) $x \leq -3$ vagy $4 \leq x$; h) $-3 < x < 6$; i) nincs megoldás; j) $x \in \mathbb{R}$.

484. A zárójelek felbontása után az előző feladathoz hasonlóan járunk el:

- a) $x \in \mathbb{R}$; b) $\frac{5}{3} < x < 5$; c) $x \leq \frac{7-\sqrt{85}}{2}$ vagy $\frac{7+\sqrt{85}}{2} \leq x$; d) nincs megoldás;
 e) nincs megoldás; f) $x < -\frac{5}{6}$ vagy $5 < x$; g) $x \in \mathbb{R}$; h) $x < -4$ vagy $\frac{1}{3} < x$.

485. a) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$, így $x = 0$;

b) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, így $x \in \left] \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 0 \right[$;

c) $x \leq 1$ vagy $3 \leq x$, így $x \in [3; 5]$.

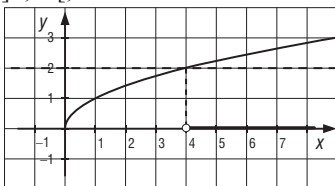
6.9. Az ekvivalens (egyenértékű) átalakításokról

486. a) nincs megoldás; b) értékkészlet vizsgálat alapján $\{0\}$; c) $\mathbb{R}^+$;

d) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$;

négyzetre emelés után az alaphalmazt is figyelembe véve:

e) $]4; \infty[$;



f) $]4; \infty[$; g) $[0; 9]$.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

487. a) Ha $1 - 2x \leq 0$, azaz $\frac{1}{2} \leq x$, akkor nincs megoldás;

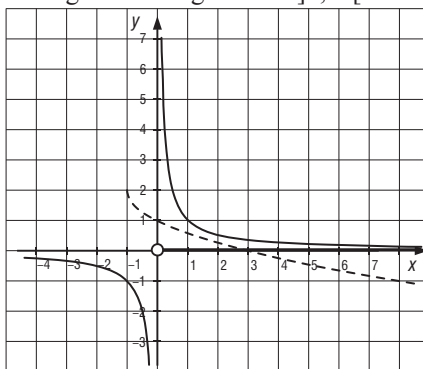
ha $x < \frac{1}{2}$, akkor $x + 1 < 1 - 4x + 4x^2$, ahonnan az alaphalmaz miatt $[-1; 0[$;

b) Ha $x \leq -2$, akkor mindig teljesül az állítás;

ha $-2 < x \leq 3$, akkor $4(3 - x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{4}$, ahonnan $-2 < x \leq 3$, tehát a megoldások egyesítve: $]-\infty; 2]$;

c) $[1; 2[$; d) $\left[0; \frac{49}{36}\right]$;

e) grafikus megoldással $]0; \infty[$.



488. Egy tört akkor pozitív, ha a számlálója és a nevezője azonos előjelű, ellenkező esetben negatív. Ezek alapján, ahol szükséges, 0-ra redukálunk, összevonunk, majd előjelvizsgálatot végzünk.

a) $x < 0$; $x > 2$;

b) $x > 19$; $x < -\frac{1}{2}$;

c) $x < 2$ vagy $4 < x$; $-3 \leq x < 1$;

d) $-\frac{1}{2} < x < 2$; $x \leq -\frac{8}{5}$ vagy $-\frac{2}{3} < x$;

e) $\frac{7}{4} < x < 3$; $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$;

f) $x < \frac{1}{2}$ vagy $\frac{8}{3} < x$; nincs megoldás;

g) $x < -10$ vagy $1 \leq x$; $1 < x \leq \frac{5}{2}$;

h) $x < -4$; $\frac{18}{5} < x < 5$;



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

- i) $-4 < x$; $-3 < x < \frac{1}{3}$;
j) $x < 5$.

489. Az előző feladathoz hasonlóan járunk el.

- a) nincs megoldás; a 0 kivételével minden valós szám megoldás;
b) nincs megoldás; a -1 kivételével minden valós szám megoldás;
c) a 7 kivételével minden valós szám megoldás; csak az egyenlőség teljesülhet, ezért $x = \frac{3}{2}$;
d) $x \geq 1$; $x \leq 1$, de $x \neq -2$;
e) $x < -3$ vagy $-2 \leq x < -1$; $-3 < x \leq -2$ vagy $-1 < x$;
f) $x < \frac{1-\sqrt{37}}{6}$ vagy $\frac{1+\sqrt{37}}{6} < x$; $\frac{1-\sqrt{37}}{6} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{37}}{6}$;
g) $0 < x < 3$; $x \leq 0$ vagy $3 < x$;
h) nincs megoldás; $x \in \mathbb{R}$;
i) $-5 \leq x < -\frac{1}{2}$ vagy $\frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{2}$; $x < -5$ vagy $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}$ vagy $\frac{3}{2} \leq x$.

490. Az előző feladatokhoz hasonlóan:

- a) $x < -5$ vagy $2 < x$; b) $x \leq -4$ vagy $\frac{1}{3} < x \leq 4$; c) $x < \frac{-5}{2}$ vagy $-2 < x < 4$;
d) $x < -\frac{3}{4}$ vagy $-\frac{1}{2} < x < 0$ vagy $2 < x$.

491. a) $-2 < x < -1$; b) $x = 0; 1$; c) $x = 2; 4$; d) $0 < x < 1$.

492. 0-ra redukálás és összevonás után előjelvizsgálattal (pl. a számláló és a nevező grafikonjának felrajzolásával):

- a) $x < 0$ vagy $1 \leq x \leq 4$ vagy $5 < x$;
b) $-\frac{7}{2} \leq x < -2$ vagy $1 < x$;
c) $\frac{-2+2\sqrt{7}}{-3} < x < -1$ vagy $2 < x < \frac{-2-2\sqrt{7}}{-3}$;
d) $x < -\frac{1}{2}$ vagy $\frac{1}{2} < x$;
e) $x < -2$ vagy $0 < x < 1$ vagy $3 < x$;
f) $x < -4$ vagy $2 < x$ vagy $x = 1$.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

493. a) Ha $x < -\frac{5}{2}$, akkor $5 - x^2 \geq -2x - 5$, ahonnan nem kapunk a tartományba eső megoldásokat;

ha $-\frac{5}{2} \leq x$, akkor $5 - x^2 \geq 2x + 5$, ahonnan $-2 \leq x \leq 0$;

b) $x \leq -6$ vagy $x = 6$ vagy $10 \leq x$;

c) az a) ponthoz hasonlóan: $\frac{11 - \sqrt{41}}{2} < x < \frac{11 + \sqrt{41}}{2}$.

494. $D > 0$ esetén $4(p-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \left(p^2 + \frac{7}{2}\right) > 0$, melyből $-3 < p < -1$ adódik.

495. Akkor kapunk azonos egyenlőtlenséget, ha a másodfokú függvénynek nincsen zérushelye, azaz $D < 0$, ami $5 - 2\sqrt{7} < p < 5 + 2\sqrt{7}$ esetén teljesül.

496. Diszkrimináns vizsgálatból $p \geq -\frac{1}{3}$. Az egyenlet kisebb megoldása

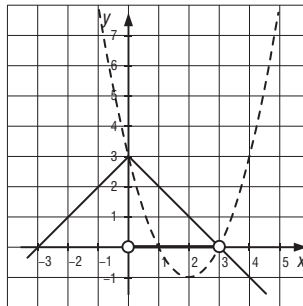
$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+3p}}{3} \geq -1, \text{ ebből } p \leq 1 \text{ adódik, az egyenlet nagyobbik megoldása}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+3p}}{3} \leq 3, \text{ ebből } p \leq 33 \text{ adódik. A három halmaz metszete: } -\frac{1}{3} \leq p \leq 1.$$

497. a) $-3 \leq x \leq 1$; b) $x < -4$ vagy $0 < x$; c) $x \leq -6$ vagy $2 \leq x$; d) $-2 < x < 1$;

e)

$$0 < x < 3;$$

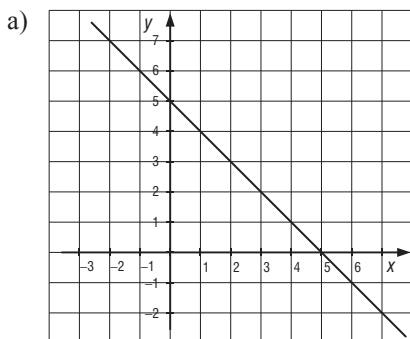


f) $-1 \leq x < 3$; g) $1 \leq x \leq 9$; h) csak az egyenlőség teljesülhet, azaz $0 \leq x \leq 4$.

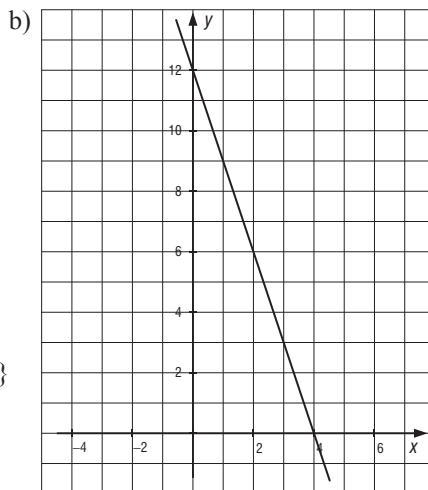


6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

498. Az egyenesre illeszkedő, első síknegyedbe eső rácpontok koordináta-párjai a megoldás számpárok:



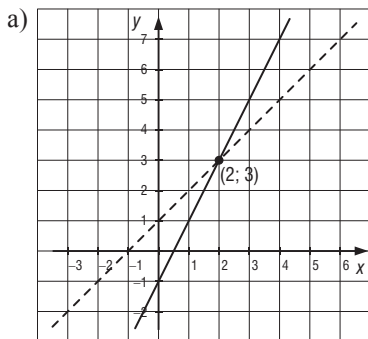
$\{(0; 5); (1; 4) (2; 3); (3; 2); (4; 1); (5; 0)\}$



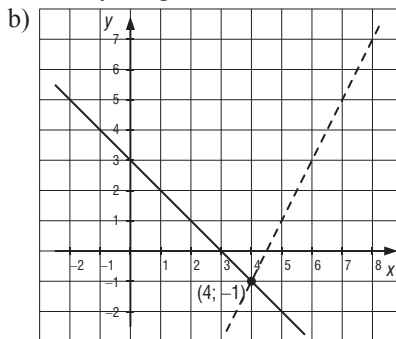
$\{(0; 12); (1; 9); (2; 6); (3; 3); (4; 0)\}$

6.10. Egyenletrendszerek

499. Minden esetben ellenőrizzük a megoldás helyességét!



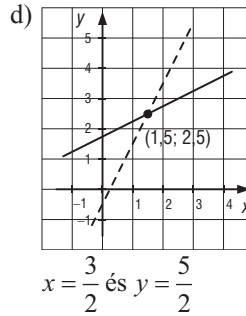
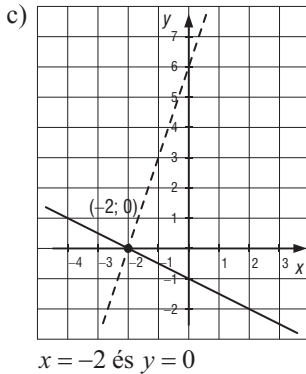
$x = 2$ és $y = 3$



$x = 4$ és $y = -1$



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK



500. a) Az első egyenletből $x = 1 - 2y$, amit a második egyenletbe behelyettesítve egvismeretlenes egyenletet kapunk: $3(1 - 2y) + 7y = 6$, melyből $y = 3$ és $x = -5$;

b) $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$; c) $(0; -2)$; d) nincs megoldás.

501. a) Kivonva a két egyenletet egymásból $x = 2$ adódik, amit visszahelyettesítve valamelyik eredeti egyenletbe $y = 1$;

b) összeadva az egyenleteket $x = \frac{1}{2}$ és $y = \frac{4}{3}$;

c) az első egyenlet háromszorosából kivonva a második egyenletet $y = -2$ és $x = -4$;

d) az első egyenlet négyszereséhez hozzáadva a második egyenlet háromszorosát
 $x = \frac{2}{5}$ és $y = \frac{5}{6}$.

502. Az előző két feladat módszereit vegyesen alkalmazzuk:

a) $(7; 1)$; b) $(-2; -5)$; c) $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$; d) $\left(1; \frac{7}{2}\right)$; e) $\left(-\frac{6}{5}; \frac{7}{10}\right)$; f) $(7; 5)$;
 g) $\left(\frac{9}{2}; 4\right)$; h) $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

503. Hozzuk az egyenleteket a lehető legegyszerűbb alakra, majd alkalmazzuk a behelyettesítő módszert, vagy az egyenlő együtthatók módszerét!

a) $(6; -6)$; b) $(-1; 6)$; c) $(-2; 3)$;

d) az egyenleteket egyszerűbb alakra hozva: $3 = 4x - 5y$ és $5x + 2y = 45$, ahonnan a megoldás számpár $(7; 5)$;

e) az egyenleteket egyszerűbb alakra hozva: $26 = 5x - 6y$ és $4x - 3y = 19$, ahonnan a megoldás számpár $(4; -1)$;



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

f) (1;3); g) (-3;5); h) (-2;3).

504. Megkönnyíthető a megoldás, ha egy-egy megfelelő tört helyett bevezetünk új ismeretleneket.

a) Az első egyenlethez hozzáadva a második egyenlet kétszeresét azt kapjuk, hogy $\frac{25}{x} = \frac{25}{3}$, ahonnan $x = 3$, amit visszahelyettesítve valamelyik eredeti egyenletbe megkapjuk, hogy $y = -2$.

b) $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$; c) (6;3); d) $\left(-\frac{8}{5}; \frac{17}{5}\right)$; e) (2;-3).

505. Az elsőfokú egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent, és ezt behelyettesítjük a másik egyenletbe.

a) A második egyenletből $y = x + 2$, ezzel az első egyenlet $x^2 + (x+2)^2 = 4$, ahonnan 0-ra redukálás és szorzattá alakítás után $x_1 = 0$ és $x_2 = -2$, amiket visszahelyettesítve y kifejezésébe $y_1 = 2$ és $y_2 = 0$ adódik. A megoldás számpárok tehát: (0;2) és (-2;0);

b) $\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$; c) (15;12);

d) Az egyenleteket kivonva egymásból $x = \frac{19}{10}$, amit visszahelyettesítve az első egyenletbe y -ra két megoldást kapunk, így a megoldás számpárok:

$$\left(\frac{19}{10}; \frac{\sqrt{39}}{10}\right) \text{ és } \left(\frac{19}{10}; -\frac{\sqrt{39}}{10}\right);$$

e) (0;1) és (6;7); f) (0;2) és (2;-6);

g) Bontsuk fel a zárójeleket, majd összevonás után vonjuk ki az egyenleteket egymásból! Az így kapott elsőfokú egyenletből fejezzük ki valamelyik ismeretlent, és helyettesítsük vissza az egyik eredeti egyenletbe! A megoldás számpárok: (3;-6) és (-1;-8);

h) (2;-6) és (8;-6); i) (1;-1) és (5;-1) és (0;4) és (6;4).

506. a) Vonjuk ki pl. az első két egyenletet egymásból, így egy kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk: $x - z = 2$ és $x + z = 4$, ahonnan $x = 3$, amit visszahelyettesítve $z = 1$ és $y = 6$.

b) A második egyenletből z -t kifejezve és a harmadik egyenletbe behelyettesítve x -re és y -ra kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk, ahonnan $x = 1$ és $y = 0$, illetve visszahelyettesítve y -t $z = -1$.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

c) $(2; 3; 5)$; d) $\left(\frac{1}{2}; -2; 1\right)$.

- 507.** Legyen x a fiúk száma, y pedig a lányok száma! Így 1 fiúnak $x-1$ fiú és y lány osztálytársa van, illetve 1 lánynak x fiú és $y-1$ lány osztálytársa van. A feladat állítása szerint

$$\left. \begin{aligned} y &= 2(x-1) \\ y-1 &= \frac{3}{2}x \end{aligned} \right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása a $(6; 10)$ számpár, azaz az osztály 16 fős.

- 508.** Legyen x az osztálylétszám, y pedig az elégségesek száma! A feladat állításai szerint

$$\left. \begin{aligned} y + 2y + 3y + \frac{x}{3} + 2 &= x \\ y + 2 &= \frac{x}{6} \end{aligned} \right\}.$$

Ebből ahonnan $x = 30$, azaz az osztály 30 fős.

- 509.** Legyen x az őszi győzelmek és y az őszi döntetlenek száma! Így a tavaszi győzelmek száma $0,8x$, a tavaszi döntetlenek száma $1,2y$. A gyűjtött pontokra felállított egyenletrendszer megoldásaként $x = 10$ és $y = 5$, tehát 18 győzelmet és 11 döntetlent játszottak a bajnokságban.

- 510.** Ha x a kis pizza és y a nagy pizza eredeti ára, akkor az áremelés utáni árak $1,6x$, illetve $1,2y$.

a) Az állításból $\frac{y}{x} = 4$ adódik, vagyis áremelés előtt a nagy pizza ára 4-szerese volt a kicsiének.

b) Mivel a kör területe a sugár négyzetének π -szerese, az átmérők arányából következik, hogy 1 nagy pizza mennyisége 4 kis pizzáéval egyenlő, így áremelés előtt ugyanannyiba került az azonos mennyiség a kis vagy a nagy pizzából. Áremelés után a 4 kis pizza árának és az 1 nagy pizza árának aránya $\frac{4 \cdot 1,6x}{1,2y} = \frac{4}{3} = 1,3$, tehát 33%-kal többet kell fizetni, ha kis pizzából fogyasztjuk el az adott mennyiséget. Áremelés előtt ugyanannyiba került a kis vagy nagy pizzából az azonos mennyiség.

- 511.** x mennyiségű, 5%-os óntartalmú bronz ötvözet óntartalma $x \cdot \frac{5}{100}$, y mennyiségű 10%-os bronzé pedig $y \cdot \frac{10}{100}$, így az $x + y$ mennyiségű 8%-os ötvözeté $(x + y) \cdot \frac{8}{100}$.

Felhasználva, hogy ötvözéskor az óntartalmak összeadódnak, felírható egy kétséme-



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

retlenes egyenlet: $x \cdot \frac{5}{100} + y \cdot \frac{10}{100} = (x + y) \cdot \frac{8}{100}$, mivel $y \neq 0$ ahonnan $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, azaz 2 : 3 arányban kell az 5%-os és a 10%-os bronzot ötvözni.

512. x mennyiségű 14 karátos arany $x \cdot \frac{14}{24}$ tiszta aranyat, y mennyiségű 22 karátos arany $y \cdot \frac{22}{24}$ tiszta aranyat, az ötvözetük pedig $(x + y) \cdot \frac{19}{24}$ tiszta aranyat tartalmaz. Az előző feladathoz hasonlóan kapjuk, hogy 3 : 5 arányban kell a kétféle aranyat összeolvasztani.

513. Az előző feladatokhoz hasonlóan:

- a) Az első oldat 32 térfogat%-os, a második 44 térfogat%-os töménységű.
- b) 2 : 3 arányban kell keverni a 32 térfogat%-os és a 44 térfogat%-os alkoholt.

514. x -szel és y -nal jelölve a két számot ($x > y$) a feladat állítása szerint $x + y = 10(x - y)$, ahonnan $y = \frac{9x}{11}$, így $11 \mid x$, így a lehetséges 50-nél kisebb, pozitív egész számpárok: (11;9); (22;18); (33;27); (44;36).

515. Legyen x a vásárolt eper mennyisége (kg-ban), és y a vásárolt eper kilónkénti ára (Ft-ban)! A feladat szerint

$$\left. \begin{aligned} x \cdot y &= 7200 \\ (x + 4)(y - 150) &= 7200 \end{aligned} \right\},$$

ahonnan $x = 12$ adódik, azaz 12 kg epret vásároltunk.

516. Legyen x az iskolába érés szokásos ideje (órában), és y a szokásos sebesség ($\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ban)! A feladat szerint

$$\left. \begin{aligned} x \cdot y &= 3 \\ \left(x - \frac{1}{15}\right)(y + 12) &= 3 \end{aligned} \right\},$$

ahonnan $x = \frac{1}{6}$ óra = 10 perc.

- a) Karcsi ezen a napon 6 perc alatt ért az iskolába.
- b) Ezen a napon $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val kellett hajtania.



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

517. 25 db eredetileg 24 forintos és 30 db eredetileg 30 forintos ceruzát vettünk.

518. Legyen x Ft 1 sós kifli ára, y Ft pedig 1 korpás zsemle ára! A feladat szerint

$$\left. \begin{aligned} 5x + 2y &= 360 \\ 4x &= 3y + 12 \end{aligned} \right\},$$

ahonnan $x = 48$ és $y = 60$, így két kifliért és öt zsemléért 396 forintot fizetnének.

519. Az első osztályú krumpli 160 Ft-ba, a másodosztályú 120 Ft-ba került kilónként.

520. Ha az egyik munkás x nap alatt, a másik y nap alatt végezne egyedül a munkával, akkor egy nap alatt egyikük a munka $\frac{1}{x}$ részét, másikuk az $\frac{1}{y}$ részét végezné el.

A feladat szerint

$$\left. \begin{aligned} \frac{6}{x} + \frac{6}{y} &= 1 \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} &= 1 \end{aligned} \right\},$$

a honnan $x = 10$ és $y = 15$, a két munkás tehát 10, illetve 15 nap alatt végezne külön-külön.

521. Legyenek x és y az eredeti téglalap oldalai! A feltételek szerint

$$\left. \begin{aligned} (x+9)(y-3) &= xy \\ (x-5)(y+4) &= xy \end{aligned} \right\},$$

megoldva az egyenletrendszert az eredeti téglalap oldalai 15 és 8 cm hosszúak.

522. Az előző feladathoz hasonlóan a telek oldalai 30 és 40 métereseek, vagy 20 és 60 métereseek.

523. A háromszög területe és kerülete közti összefüggésből a beírt kör sugara $r = 3$ cm, mellyel felírható az oldalak közt egy összefüggés (átfogó = befogók összege $- 2r$). Ebből és a Pitagorasz-tételből kapunk egy *diophantoszi* egyenletet a két befogóra, melynek megoldásai a $(7;24)$, $(8;15)$ és $(9;12)$ számpárok. A lehetséges háromszög oldalak: 7, 24 és 25 cm, vagy 8, 15 és 17 cm, vagy 9, 12 és 15 cm.

524. Legyen az eredeti szám első számjegye $x-3$, második számjegye x , az ötszörösének a számjegyei pedig $y-2$, $y-1$ és y ! A kapott 3-jegyű szám 5-tel osztható, így 0-ra



6. EGYENLETEK – MEGOLDÁSOK

vagy 5-re végződik, mivel azonban a jegyei növekvő sorrendben állnak, ezért $y = 5$, azaz $5 \cdot (10(x-3) + x) = 345$, ahonnan $x = 9$. A keresett kétjegyű szám a 69.

525. Legyen k a kék csúcsok száma, p a piros csúcsok száma! A feladat szerint

$$\left. \begin{aligned} k \cdot p &= 40 \\ \frac{k(k-1)}{2} &= 18 + \frac{p(p-1)}{2} \end{aligned} \right\}.$$

Mivel k és p is egész szám, ezért a 40 szorzatalakjait végiggondolva az egyetlen lehetséges megoldás, hogy 8 kék és 5 piros csúcs van.

526. Legyen a téglalap két oldala a és b , területe $a \cdot b = 400$. A kerülete $2(a + b)$. Használjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget!

$K = 2(a + b) = 4 \frac{a+b}{2} \geq 4\sqrt{a \cdot b} = 4 \cdot 20 = 80$. A kerület akkor lesz a legnagyobb, ha $a = b = 20$, azaz ha a téglalap négyzet.

527. Legyen a körcikk sugara r , a határoló ív hossza i ! Ekkor a kerülete $K = 2r + i$, területe pedig $T = \frac{r \cdot i}{2}$. Mivel i és r pozitív, használjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget.

$\frac{2r+i}{2} \geq \sqrt{2r \cdot i}$, melyből $\frac{K}{2} \geq \sqrt{4T}$, melyből $T \leq \frac{K^2}{16}$. Így T akkor maximális, ha $2r = i$.

528. Legyen a téglalap két oldala a és b . A kerítés hossza $a + 2b$. Az előző feladathoz hasonlóan $\frac{a+2b}{2} \geq \sqrt{a \cdot 2b}$, melyből $\frac{K}{2} \geq \sqrt{2T}$, melyből $T \leq \frac{K^2}{8}$. A terület akkor lesz maximális, ha $a = 2b$.



7. Geometria – megoldások

7.1. A háromszög szögeire, oldalaira vonatkozó tételek

529. Vizsgáljuk meg, hogy teljesül-e a megfelelő háromszög-egyenlőtlenség (elegendő a két rövidebb oldal összegét vizsgálni)!

a) igen; b) nem; c) igen; d) nem; e) igen; f) igen.

530. a) $1,4 + 3,6 > x$, melyből $x < 5$; $1,4 + x > 3,6$, melyből $2,2 < x$ és $3,6 + x > 1,4$, ami minden x -re teljesül, a két előző feltétel alapján a harmadik oldal csak 3 vagy 4 cm lehet.

b) 2007, 2008 vagy 2009 cm.

531. Nem érhetünk vissza eredeti helyünkre, mert a 3 szakasz hossz nem határoz meg egy háromszöget ($27 + 24 < 52$!).

532. Emeljünk derékszögű háromszöget az AB szakaszra, mint átfogóra, mely háromszög befogói az x és y tengellyel párhuzamosak! A befogók hossza A és B megfelelő koordinátáinak különbsége, így a Pitagorasz-tétel segítségével:

a) $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$;

b) $AB = \sqrt{(12-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{90}$;

c) $AB = \sqrt{50}$.

533. A 7 cm oldalú négyzet átlója $7\sqrt{2} \approx 9,89$ cm, ami kisebb, mint a körlap átmérője, tehát ki lehet vágni.

534. A téglalap átlója $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ cm, azaz egy legalább $15 : 2 = 7,5$ cm sugarú kör-lapból lehet kivágni.

535. Az eredő erő nagysága egy 50 és 70 egység oldalú téglalap átlójának hossza, azaz közelítőleg 86 N.

536. A kép oldalainak hosszát $2x$ -szel és $3x$ -szel jelölve $(2x)^2 + (3x)^2 = 18^2$, ahonnan

$$x = \frac{18}{\sqrt{13}} \approx 4,99, \text{ a kép méretei tehát közelítőleg } 10 \text{ és } 15 \text{ cm.}$$

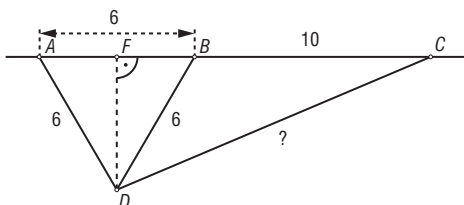


7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

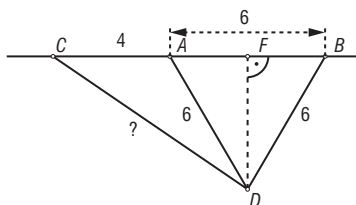
537. Az asztal átlójának hossza $100\sqrt{2} \approx 141,4$ cm, ami nagyobb, mint a terítő átmérője, azaz nem fedhető le teljesen az asztal.

538. Az A , B és D pontok egy szabályos háromszöget határoznak meg. Jelölje F az AB szakasz felezőpontját! A keresett DC távolság a DFC derékszögű háromszögből számítható ki, melyben DF a 6 km oldalú szabályos háromszög magassága:
 $DF = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27}$ km.

1. eset: Ha a pontok sorrendje A, B, C , akkor az FC szakasz hossza 13 km, így
 $DC = \sqrt{27 + 13^2} = 14$ km.



2. eset: Ha a pontok sorrendje C, A, B , akkor az FC hossza 7 km, így $DC \approx 8,72$ km.



539. Mivel a vonalra illeszkedő oldalak hossza egész szám, így a nem vonalra illeszkedő oldalak hossza is, ami csak úgy teljesülhet, ha az oldalhosszak valamely pitagoraszai számhármias legnagyobb elemei.

540. a) A 31 csomós kötél 30 egység hosszú, amivel akkor lehet derékszögelni, ha van olyan pitagoraszai számhármias, melyben a számok összege 30.

– Tekintsük a 3, 4, 5 pitagoraszai számhármast, illetve ennek többszöröseit! A $3x + 4x + 5x = 30$ egyenletnek nincsen egész megoldása.

– Tekintsük az 5, 12, 13 számhármast és többszöröseit! Az $5x + 12x + 13x = 30$ egyenletnek van egész megoldása, azaz a kötélből kialakítható egy derékszögű háromszög, melynek oldalhosszai 5, 12 és 13 egység. A 31 csomós kötéllel tehát lehet derékszögelni.

b) Hasonlóan kapjuk, hogy a 37 csomós kötéllel is lehet derékszögelni, mert kialakítható belőle egy 9, 12, 15 egység oldalú derékszögű háromszög.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

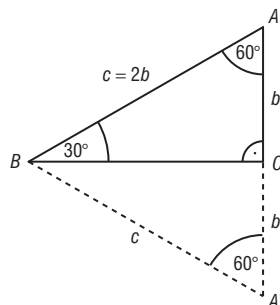
- 541.** Felírva a belső szögösszeget: $2x + 3x + 7x = 180^\circ$, ahonnan $x = 15^\circ$, így a háromszög szögei 30° , 45° és 105° .
- 542.** A háromszög külső szögeire felírható, hogy $3x + 4x + 5x = 360^\circ$, melyből x kiszámítható, így a háromszög belső szögei 30° , 60° és 90° , a háromszög tehát derékszögű.
- 543.** a) – Ha a 36° -a szárszög külső szöge, akkor a szárszög 144° , az alapon fekvő egyenlő szögek pedig 18° -osak.
 – Ha a 36° az alapon fekvő szög külső szöge, akkor az alapon fekvő szögeknek 144° -osnak kellene lenniük, ami nem lehetséges.
 b) 40° , 40° és 100° , vagy 40° , 70° és 70° ;
 c) 80° , 50° és 50° , vagy 80° , 80° és 20° .
- 544.** Legyen a szárszög külső szöge α ! Felírva a külső szögek összegét két megoldás lehetséges:
 a) $\alpha + 2(\alpha + 18^\circ) = 360^\circ$, ahonnan $\alpha = 108^\circ$, így a háromszög belső szögei: 72° , 54° és 54° .
 b) $\alpha + 2(\alpha - 18^\circ) = 360^\circ$, ahonnan $\alpha = 132^\circ$, így a háromszög szögei: 48° , 66° és 66° .
- 545.** α -val jelölve a háromszög legkisebb szögét a másik két szög $\alpha + 10^\circ$ és $3(\alpha + 10^\circ)$, így a belső szögösszegekből $\alpha = 28^\circ$ adódik, a másik két szög pedig 38° és 114° .
- 546.** A feladat állításai szerint, valamint felhasználva, hogy egy háromszögnek egy külső szöge egyenlő a két nem mellette fekvő belső szög összegével, a háromszög szögei: α , 2α és 2α . A belső szögösszegekből $\alpha = 36^\circ$, a másik két szög így 72° , tehát egyenlő szárú és hegyesszögű a háromszög.
- 547.** Az ismert arányú külső szögeket $2x$ -szel és $3x$ -szel jelölve a háromszög belső szögei x , $180^\circ - 2x$ és $180^\circ - 3x$, melyek összegéből x kiszámítható, így a háromszög szögei 45° , 45° és 90° , azaz egyenlő szárú és derékszögű a háromszög.
- 548.** α -val jelölve a háromszög szárszögét a háromszög belső szögeinek összege:
 $\alpha + 2 \cdot (180^\circ - 3,5\alpha) = 180^\circ$, melyből $\alpha = 30^\circ$.
 a) A háromszög szögei: 30° , 75° és 75° .
 b) A szögfelező az alappal $37,5^\circ$ -os szöget zár be, ebből következően az alapra merőleges magassággal $90^\circ - 37,5^\circ = 52,5^\circ$ -os szöget zár be.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

549. Használjuk fel, hogy az egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögei egyenlők, illetve hogy egy külső szög egyenlő a két nem mellette fekvő belső szög összegével! $\alpha = 90^\circ$.

550. Egy 30° -os derékszögű háromszöget a hosszabbik befogójára tükrözve az eredeti és a képháromszög együttesen egy szabályos háromszöget alkot, hiszen a tengelyes tükrözés távolság- és szögtartó. A szabályos háromszög oldalhossza az eredeti háromszög átfogója, ami épp kétszerese az eredeti háromszög 30° -kal szemközti befogójának, így 4 egység hosszúságú. Az eredeti háromszög harmadik oldala pedig a Pitagorasz-tételből $4\sqrt{3}$ egység hosszú.



7.2. A háromszög nevezetes vonalai és pontjai

551. a) igaz; b) igaz; c) igaz; d) hamis; e) igaz.

552. a) – e) Először a háromszöget kell megszerkeszteni, majd a definíciók szerinti megfelelő nevezetes vonalakat és pontokat.

f) 1. *megoldás:* Tekintsük a kört egy háromszög köréírt körének, ezért jelöljünk ki a körön 3 pontot! Ezen háromszög két oldalfelező merőlegesének metszéspontja a kör középpontja.

2. *megoldás:* Jelöljünk ki 2 pontot a körön! Az ezek által meghatározott szakasz felezőmerőlegesének a körbe eső része a kör átmérője, tehát a felezőpontja a kör középpontja.

553. a), b) alapszerkesztések;

c) Vegyük fel a -t (BC oldal), majd húzzunk vele párhuzamost m_a távolságban! Mérjük fel β -t BC -re, tetszőleges végpontjában, ez a szögcsár kimetszi a párhuzamosból A -t!

d) A BC oldallal m_a távolságban húzott párhuzamos egyenesre körívezünk BC oldal felezőpontjából s_a sugárral, ez kimetszi az A csúcsot.

e) Az előzőekhez hasonló a szerkesztés menete.

f) A BC oldal B végpontjába felvesszük β -t, melynek szögcsárára C -ből s_c sugárral körívezünk, ez kimetszi az AB oldal F felezőpontját. BF -et F -en túl BF -fel meghosszabbítva megkapjuk az A csúcsot.

g) Az s_b , a és $\frac{b}{2}$ szakaszokból megszerkeszthető háromszög segítségével megkapjuk a harmadik csúcsot.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

- h) Az s_b átfogójú, m_b befogójú derékszögű háromszög megszerkeszthető (a Thálész-tétellel), melynek a másik befogója által meghatározott egyenesre B -ből a -val körívezve megkapjuk a C csücsot, annak segítségével pedig az A csücsot.
- i) A szögfelező a háromszöget két háromszögre bontja, melyek közül az egyik 2 oldalból és a közbezárt $\frac{\beta}{2}$ szögből megszerkeszthető.
- j) Az f) ponthoz hasonló a szerkesztés menete.
- k) F -fel jelölve a BC oldal felezőpontját és S -sel a súlyvonalak metszéspontját – kihasználva, hogy a súlypont a csücsoktól távolabb harmadolja a súlyvonalakat –, a BSF háromszög 3 oldalból megszerkeszthető $\left(\frac{a}{2}, \frac{1}{3}s_a, \frac{2}{3}s_b\right)$.
- l) Az előzőhöz hasonlóan BSC háromszög megszerkesztésével induljunk!
- m) Jelöljük T -vel az m_b magasság talppontját! A BCT derékszögű háromszög megszerkeszthető. Feltéve, hogy α hegyesszög, a TB oldalára kívülről felvesszük B -ben α pótszögét, melynek szögszára kimetszi CT egyeneséből az A csücsot.

554. a) hamis; b) igaz; c) hamis; d) igaz; e) hamis; f) hamis.

555. Használjuk ki, hogy a háromszög köré írt kör középpontja egyenlő távol van a csücsoktól, illetve a beírt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja!

- a) Jelöljük K -val a háromszög köré írható kör középpontját! Szerkesszük meg a KBC háromszöget 3 oldalából! β -t a BC oldalra felmérve a szögszár kimetszi a K középpontú, R sugarú körből az A csücsot.
- b) c) Az előző feladathoz hasonlóan induljunk el!
- d) K -val a beírt kör középpontját jelölve az előzőkhöz hasonlóan KBC háromszög megszerkesztésével indulhatunk el (melynek BC -hez tartozó magassága r , egyik BC -n fekvő szöge pedig $\frac{\beta}{2}$), majd a KBC és KCB szögek KB -re, illetve KC -re történő másolásával A -t is megkapjuk.
- e) Az ABK háromszög AB -hez tartozó magassága r , AB oldalán fekvő szögei $\frac{\alpha}{2}$ és $\frac{\beta}{2}$. Ezen háromszög K -ból induló magasságvonala $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, illetve $90^\circ - \frac{\beta}{2}$ szöget zár be a KA és KB oldalakkal. Ezek alapján r felvételével indulva az AKB háromszög megszerkeszthető.

556. Használjuk ki, hogy szabályos háromszögben az egy oldalhoz tartozó magasságvonal, súlyvonal, szögfelező és oldalfelező merőleges egybeesik!

- a) A magasság mindkét oldalára vegyük fel a megfelelő szögeket...!
- b) A háromszög oldala a középvonal 2-szerese...
- c) – d) A beírt és köréírt kör középpontja a háromszög súlypontja, ami harmadolja a magasságokat...



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

557. a) – l) Használjuk ki a nevezetes vonalak definícióit, illetve az egyenlő szárú háromszög tulajdonságait!

m) Készítsünk vázlatot, melyben az egyenlő szárú háromszög alapja legyen a BC oldal, a szárszögnél pedig az A csúcs! B és C körül a BC egyenesére leforgatva a szárazakat kapjuk a P és Q pontokat. Az így keletkező PQA egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögeiről megmutatható, hogy $\frac{180^\circ - \alpha}{4}$ nagyságúak, tehát megszerkeszthetők. Mivel PQA háromszög alapja az adott kerület, és a rajta fekvő szögek ismertek, a háromszög megszerkeszthető, innen a megfelelő szögek segítségével a B és C csúcsok is kimetszhetők a PQ szakaszból.

558. A megadott szögeknél lévő csúcsokat A -val és B -vel, a szögfelezők metszéspontját pedig P -vel jelölve a keresett hajlásszög az ABP háromszög P csúcsnál lévő külső szöge. Tudjuk, hogy egy külső szög egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével, így a kérdéses szög $\frac{66^\circ}{2} + \frac{34^\circ}{2} = 50^\circ$ nagyságú.

559. A háromszög két ismeretlen szögét α -val és β -val jelölve, az előző példához hasonlóan a szögfelezők hajlásszöge $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, azaz felhasználva, hogy $\alpha + \beta = 180^\circ - 80^\circ$, a két szögfelező által bezárt szög 50° .

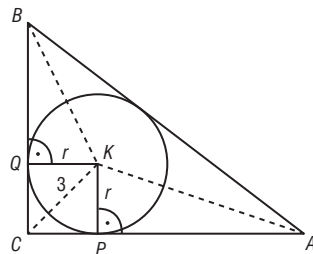
560. Az előzőkhöz hasonlóan a keresett szög 116° .

561. Az előző feladatok alapján könnyen belátható.

562. Jelöljük K -val a beírt kör középpontját, C -vel a derékszögű csúcsot, és A -val, B -vel az átfogó végpontjait! K -ból a befogókra bocsátott merőlegesek sugár (r) hosszúságúak, legyenek a talppontjaik P és Q !

a) $KQCP$ egy négyzet, melyben $2 \cdot r^2 = 3^2$, azaz $r = \frac{3}{\sqrt{2}}$ cm.

b) Az AK és BK szakaszok hossza a megfelelő derékszögű háromszögekből Pitagorasz-tétel segítségével kiszámítható: $AK = \sqrt{r^2 + (10 - r)^2} \approx 8,16$ cm, és $BK = \sqrt{r^2 + (8 - r)^2} \approx 6,25$ cm.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

- 563.** A beírt, illetve a köréírt kör középpontja a szabályos háromszög súlypontja, így könnyen belátható, hogy a beírt kör sugara a háromszög magasságának $\frac{1}{3}$ része, míg a köréírt kör sugara ennek a kétszerese. A háromszög magassága $3\sqrt{3}$ egység, tehát a beírt kör sugara $\sqrt{3}$ egység, a köréírt kör sugara $2\sqrt{3}$ egység.
- 564.** Az előző feladat alapján:
a) A beírt kör sugara 1 cm, a köréírt köré 2 cm.
b) Az oldalak hossza $2\sqrt{3}$ cm.
- 565.** Használjuk ki, hogy a 30° -os derékszögű háromszögben a rövidebb befogó feleakkora, mint az átfogó!
- 566.** Az $\frac{1}{3}$, illetve $\frac{2}{3}$ súlyvonal hosszúságú, valamint az $\frac{1}{2}$ oldalhosszúságú szakaszok által határolt háromszögek egybevágóságából következik a feladat állítása.
- 567.** a) igaz; b) hamis; c) hamis; d) igaz.
- 568.** Szögei: 30° , 60° és 90° , oldalai: 4 cm, 2 cm és $2\sqrt{3}$ cm.
- 569.** A súlyvonal merőlegességéből következik, hogy a háromszög egyenlő szárú, ezért az a és b oldal hajlásszöge 50° , ahonnan a súlyvonal és az a oldal hajlásszöge 40° . Mivel a középvonal párhuzamos az a oldallal, ezért a keresett szög 40° .
- 570.** A háromszög szögei: 40° , 70° és 70° .
- 571.** Kihhasználva a középvonal definícióját és a rá vonatkozó tételt, a háromszög szögei: 30° , 30° és 120° , oldalai 2, 2 és $2\sqrt{3}$ egység.
- 572.** Az **561.** feladat alapján a háromszög egyenlő szárú, jelöljük az alapját a -val, a szárait b -vel! Kihhasználva, hogy a súlyvonalak harmadolják egymást, valamint a 18 egységnyi súlyvonal merőleges az alapra: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 6^2 = 10^2$, ahonnan $a = 16$ egység. A háromszög szárai pedig közelítőleg 19,70 egység hosszúságúak.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

573. Két megoldás lehetsége:

1. Az egyenlő szárú derékszögű háromszöget a szárszög szögfelezője két egyenlő szárú háromszögre vágja, azaz a szögek: 45° , 45° és 90° .
2. Az alapon fekvő szögek szögfelezője csak hegyesszögű egyenlő szárú háromszöget tud két egyenlő szárú háromszögre vágni, melyek nem egybevágók. Kihhasználva az egyenlő szárú háromszögek tulajdonságait a háromszög szögei: 36° , 72° és 72° .

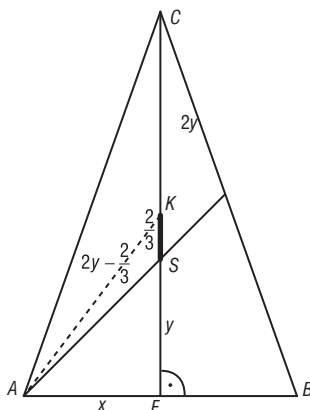
574. a) A háromszög oldalai: $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$ és 12 cm.

b) A befogókhoz tartozó súlyvonalak hossza: $\sqrt{90}$ cm.

575. Jelöljük K -val a köréírt kör középpontját, S -sel a súlypontot, A és B -vel az alap végpontjait és F -fel az AB felezőpontját! Legyen x az alap felének hossza, y pedig az SF szakaszé! Tételezzük fel, hogy a háromszög hegyesszögű! A két ismeretlenre felírhatunk két egyenletet:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2\sqrt{2})^2 \\ x^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 &= \left(2y - \frac{2}{3}\right)^2 \end{aligned} \right\},$$

ahonnan a feladatnak megfelelő (pozitív) megoldások $x = 2$ és $y = 2$. Így a háromszög alapja 4 , szárai $\sqrt{40}$ egység hosszúságúak. (Tompaszögű háromszög nem ad megoldást.)



576. A rövidebb befogó és a magasság hajlásszöge egyenlő a hosszabbik befogó és az átfogó hajlásszögével, mert merőleges szárú szögek, így a szögfelező és a magasság által bezárt szög $45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

577. Az előző feladat alapján a magasság, a szögfelező és az átfogó által közrezárt derékszögű háromszög 30° -os, így Pitagorasz-tétel segítségével a szögfelező háromszögbe eső szakasza $2\sqrt{3}$ egység.

7.3. A háromszög területszámítási módjai

578. A súlyvonal definíciója szerint a két háromszög egy-egy oldala egyenlő hosszúságú, az ezzel szemközti csúcsuk, így az ezen oldalhoz tartozó magasságuk is közös, tehát a területük egyenlő.

579. Az ABC háromszög BC befogója fele az átfogónak (30° -os a háromszög), így

$$BC = 17 \Rightarrow AC = 17\sqrt{3} \text{ egység.}$$

$$\text{a) } T = \frac{CP \cdot CB}{2} = \frac{\frac{17\sqrt{3}}{2} \cdot 17}{2} \approx 83,43 \text{ egység.}$$

b) Az előző feladat szerint BPQ háromszög területe egyenlő a BCP háromszög területével.

580. $T = 3\sqrt{3} \text{ dm}^2$.

581. A PQF háromszög PQ -hoz tartozó magassága párhuzamos BC -vel, és mivel egyik végpontja F , ezért az eredeti háromszögnek középvonala, így $\frac{BC}{2}$ hosszúságú. PQF háromszög PQ oldala az eredeti háromszög AC oldalának harmada, magassága pedig az eredeti háromszög magasságának a fele, ezért a területe az eredeti háromszög területének a hatoda.

582. Az előző feladatokhoz hasonlóan az AFC háromszög (F az AB oldal felezőpontja) területe $\frac{30}{2} = 15 \text{ cm}^2$, melynek CF oldalát az S súlypont az F -hez közelebb harmadolja, ezért a kérdéses AFS háromszög területe $\frac{15}{3} = 5 \text{ cm}^2$.

583. Az előző feladat alapján belátható.

584. Jelöljük T -vel az ABC háromszög, t -vel az AMC háromszög és t^* -gal a PFM háromszög területét! Az előző feladatokhoz hasonlóan belátható, hogy az APC háromszög területe $\frac{T}{3}$, az APF háromszögé $\frac{T}{6}$ és a PFC háromszögé $\frac{T}{3}$. Az APC háromszög



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

területére felírható, hogy $t + \frac{T}{6} - t^* = \frac{T}{3}$. Felhasználva, hogy ha két háromszög egyik

oldala egy egyenesbe esik, és az ezzel szemközti csúcsuk közös, akkor a területeik

aránya a közös csúccsal szemközti oldalaik aránya: $\frac{\frac{T}{3} - t^*}{t} = \frac{t^*}{\frac{T}{6} - t^*}$. Az első egyen-

letből t^* -ot kifejezve, majd a második egyenletbe behelyettesítve megkapjuk, hogy $t = \frac{T}{4}$.

585. a) A két derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel kiszámítható az a oldal két szelete, így $a = 63$ m.

b) Mivel a súlyvonal felezi a háromszög területét, így a részek területe:

$$\frac{63 \cdot 20}{2} \cdot \frac{1}{2} = 315 \text{ m}^2.$$

586. a) Írjuk fel a magasság által létrehozott két derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt! A kétismeretlenes egyenletrendszerből $m_a = 24$ egység.

b) $T = 468$ területegység.

c) $T = \frac{c \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c = 37,44$ egység.

587. Használjuk a terület kétféle kiszámítási módját – a Heron-képletet és a beírt kör sugarát felhasználó összefüggést! Ezekből $r = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,22$ cm.

588. Felhasználva, hogy egy külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, a háromszög oldalainak a beírt kör érintési pontjai által létrehozott szakaszai közt 2-2 egyenlő hosszúságú. Az átfogó két szejletét x -szel és $(10 - x)$ -szel jelölve a befogók szejletei x és 2, illetve 2 és $(10 - x)$. A Pitagorasz-tétel segítségével az átfogó szejleteire 4 és 6 egység adódik, így a háromszög területe 12 területegység.

589. A Pitagorasz-tételből az átfogó hossza a befogó $\sqrt{2}$ -szöröse, így a kerület felírható: $2x + x\sqrt{2} = 13,66$, ahonnan a befogók hossza közelítőleg 4 cm. A háromszög területe közelítőleg 8 cm^2 .

590. A terület $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

- 591.** A szabályos háromszög beírt, illetve köréírt körének középpontja a háromszög súlypontja és egyben magasságpontja is. Ennek felhasználásával:
- $T = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$;
 - $T = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
- 592.** A szár kiszámítása után a terület kétféle felírásából megkapjuk, hogy a szárhoz tartozó magasság közelítőleg 9,23 egység.
- 593.** Az $\frac{a}{2}$, s_a és b hosszúságú szakaszok pitagoraszí számhármast alkotnak, ezért derékszögű háromszöget zárnak közre, melynek derékszöge az eredeti háromszögben a szokásos jelölések szerinti γ szög. Így közelítőleg a c oldal hossza 7,21 cm, a háromszög kerülete 17,21 cm, a területe pedig 12 cm^2 .
- 594.** Az előző feladathoz hasonlóan $T = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48 \text{ cm}^2$.
- 595.** A középvonalak hossza 6, 8 és 10 mm, melyek derékszögű háromszöget határoznak meg, így ennek területe 24 mm^2 .
- 596.** a), b) Az átfogóra emelt Thalész-körből a megfelelő módon kimetszhető a derékszögű csúcs.
- c) Használjuk ki, hogy az átfogóhoz tartozó súlyvonal hossza a Thalész-kör sugara, így ismert az átfogó!
- d) A két, befogóra eső pont által meghatározott szakaszra emeljünk Thalész-kört, és az átfogó egyenesével m_c távolságban húzott párhuzamos kimetszi ebből a derékszögű csúcsot.
- 597.** Az egyes szakaszok jelölésekor használjuk ki, hogy 30° -os derékszögű háromszögben a rövidebb befogó fele az átfogónak! A Pitagorasz-tétel segítségével az adódik, hogy a kör negyedeli a háromszög oldalát, azaz 2 és 6 egység hosszúságú részekre osztja.
- 598.** A Thalész-tétel megfordításából és a súlyvonal definíciójából következik az állítás.
- 599.** A középvonal-tétel miatt a megadott középvonal valamelyik befogóval van szemben, így a háromszög befogói 24 és 7 egység hosszúságúak. Az átfogóhoz tartozó súlyvonal feleakkora, mint az átfogó, azaz 12,5 egység, a befogókhoz tartozó súlyvonalak hossza pedig a Pitagorasz-tétel segítségével meghatározható: közelítőleg 24,25 és 13,89 egység.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

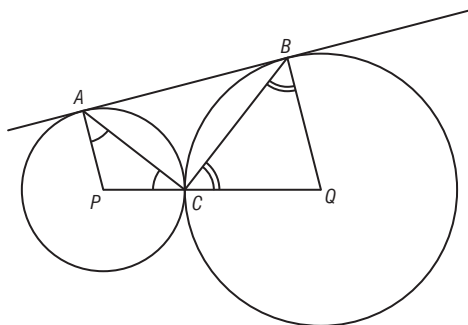
600. Legyen C a derékszögű csúcs, T a magasság talppontja, F az átfogó felezőpontja, B az átfogó T -hez közelebbi, A pedig a másik végpontja! Az előző feladat szerint CFA egyenlő szárú háromszög, tehát $FCA\angle = CAB\angle$, ugyanakkor $CAB\angle = TCB\angle$, mert merőleges szárú szögek, ezekből következően $FCA\angle = TCB\angle$, melyből már adódik a feladat állítása.

601. A két talppont külön-külön a harmadik oldallal egy-egy derékszögű háromszöget határoz meg, melyeknek az átfogója közös, így a Thalész-tétel megfordításából következik a feladat állítása.

602. Az előző feladatból következik a szerkesztés menete.

603. Legyen a kisebbik kör középpontja P , a nagyobbiké Q , a közös külső érintő érintési pontja a kisebbik körön A , a nagyobbikon B , és a két kör érintési pontja C ! $ABQP$ derékszögű trapéz, melynek a PQ száron fekvő szögei kiegészítő szögek, valamint az ACP és BCQ háromszögek egyenlő szárúak, ezért az alapon fekvő szögek egyenlők. Mindezek alapján:

$$\begin{aligned} ACB\angle &= 180^\circ - ACP\angle - BCQ\angle = 180^\circ - \frac{180^\circ - APC\angle}{2} - \frac{180^\circ - BQC\angle}{2} = \\ &= \frac{APC\angle + BQC\angle}{2} = 90^\circ. \end{aligned}$$



604. Legyenek A, B, C a háromszög csúcsai, P, Q, R az oldalfelező pontok (A -val szemben P , stb.) és T pl. az AB oldalra eső magasság talppontja! Az ATC derékszögű háromszögben QT súlyvonal fele az AC átfogónak, ezért az AQT háromszög egyenlő szárú, azaz $ATQ\angle = T AQ\angle$.

Mivel QP középvonal, így QP párhuzamos TR -rel, tehát $PQT\angle = ATQ\angle$, de PR is középvonal, így $TAQ\angle = QPR\angle$, amiből adódik, hogy $QPRT$ szimmetrikus trapéz.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

605. A húrok közös végpontját jelöljük P -vel, a kör középpontját K -val, a húrok felezőpontját F -fel! Bármely húr esetén a PKF háromszög derékszögű, melynek F a derékszögű csúcsa, így a Thalész-tétel megfordítása értelmében illeszkedik a PK átmérőjű körre. A húrok felezőpontjai tehát egy PK átmérőjű kört határoznak meg.

606. Az előző feladatból következik a szerkesztés menete.

607. a) hamis; b) igaz; c) igaz; d) igaz (mert a 3 súlyvonalból egyértelműen megszerkeszthető a háromszög); e) igaz.

7.4. A speciális négyszögek fajtái

608. a) igaz; b) igaz; c) hamis; d) hamis; e) igaz.

609. A paralelogramma szomszédos szögei kiegészítő szögek, a szemköztiek pedig egyenlők, így a paralelogramma szögei: 72° és 108° .

610. Használjuk ki, hogy a négyszögek belső szögösszege 360° !

a) A deltoid szögei: 45° , 75° , 75° és 165° .

b) A rövidebb oldallal $7,5^\circ$, a hosszabbal $67,5^\circ$ -os szöget zár be.

611. a) 110° , 53° , 144° és 53° , vagy 53° , 110° , 87° és 110° .

b) Egy szög nem határozza meg a deltoid összes szögét, ezért a feladat egyértelműen nem oldható meg.

612. A rombusz átlói felezik a szögeket, és a szomszédos szögei kiegészítő szögek, így a rombusz szögei: 70° és 110° .

613. Használjuk ki, hogy a téglalap átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást! A kérdéses szögek: 68° és 22° .

614. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, és oldalai egyenlő hosszúságúak, így az oldalhossz 26 cm, a másik átló hossza pedig 48 cm.

615. A másik oldal 30 cm, a másik átló 48 cm hosszú.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

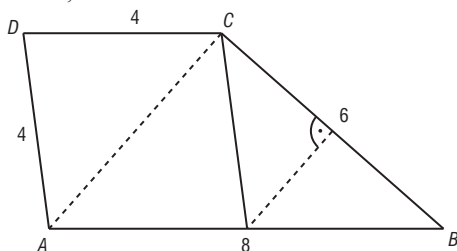
- 616.** A négyzet oldalhossza $\frac{8}{\sqrt{2}}$, a P -ből az oldalra bocsátott merőleges $\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\frac{7}{\sqrt{2}}$ hosszú

részekre osztja az oldalt. A keresett távolság:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 5 \text{ egység.}$$

- 617.** A rövidebb alap végpontjaiból a hosszabb alapra bocsátott merőlegesek a hosszabb alapot 12, 4 és 12 méteres részekre osztják. A Pitagorasz-tételből a töltés magassága 5 m.

- 618.** Legyen $AB = 8$, $BC = 6$, $CD = 4$ és $DA = 4$!



1. *megoldás:* Húzzunk C -n keresztül az AD szárral párhuzamost! Ez a párhuzamos egy rombuszra és egy 4, 4, 6 egység oldalú háromszögre osztja a trapézt. Mivel ez a háromszög egyenlő szárú, az alaphoz tartozó magassága felezi azt. Ugyanakkor ez a magasság az AB oldalt is felezi, ezért középvonal az ABC háromszögben. A középvonaltétel miatt így AC is merőleges BC -re, tehát az ABC háromszög derékszögű, ezért $AC = 2\sqrt{7}$ egység.

2. *megoldás:* Kössük össze az AB oldal F felezőpontját C -vel! $AFCD$ egy rombusz, azaz $FC = 4$, F tehát egyenlő távol van A -tól, B -től és C -től, vagyis az ABC háromszög köré írható kör középpontja, ezért az ABC háromszög derékszögű (továbbiakban lásd előző megoldás).

3. *megoldás:* Az AD és BC szarak meghosszabbításának metszéspontját jelöljük E -vel! DC középvonal az ABE háromszögben, ezért $DE = 4$ és $CE = 6$ egység. Ezek alapján az ABE háromszög egyenlő szárú, melyben AC magasság, ezért merőleges BE -re (továbbiakban lásd első megoldás).

- 619.** A rövidebb alap végpontjait a hosszabb alap felezőpontjával összekötő szakaszokról megmutatható, hogy 4 cm hosszúak, így 3 db szabályos, egybevágó háromszögre osztják a trapézt. A trapéz szögei tehát 60° és 120° , átlója $4\sqrt{3}$ cm (lásd az előző feladatot).



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

- 620.** a) Az egyik átló behúzásával belátható, hogy a kérdéses négyszög két szemközti oldala az így létrejött háromszögekben középvonal, így egymással párhuzamos és egyenlő, ezért a felezőpontok paralelogrammát határoznak meg.
 b) Az előzőek alapján olyan paralelogrammát kapunk, melynek oldalai merőlegesek egymásra, azaz egy téglalapot.
 c) Az a) pont alapján olyan paralelogrammát kapunk, melynek az oldalai egyenlő hosszúak, azaz egy rombuszt.
 d) A b) és c) pontok alapján egy négyzetet kapunk.
- 621.** Az előző feladat a) pontja alapján belátható.
- 622.** A paralelogrammának a megadott háromszögön kívüli része egy 120° -os szárszögű egyenlő szárú háromszög, illetve egy szabályos háromszög, melyek szögeiből következik a feladat állítása.
- 623.** Váltószögek segítségével belátható, hogy a szögfelezők egyenlő szárú háromszögeket vágnak le a paralelogrammából, azaz felezik a szemközti oldalt, és mivel egy szakasznak csak egy felezőpontja van, ezért abban metszik egymást.
- 624.** Két szemközti szög felezője párhuzamos egymással, a szomszédosak merőlegesek egymásra, ezért a szögfelezők téglalapot határoznak meg.
- 625.** A rombusz átlóinak behúzásával megmutatható, hogy az asztal területének az 50%-át fedi le a terítő.
- 626.** a) Deltoid.
 b) A megfelelő derékszögű háromszögekből kiszámíthatóak a deltoid oldalai, illetve a nem szimmetriaátlója, így: $K = 2(4\sqrt{13} + 6\sqrt{13}) = 20\sqrt{13} \approx 72,11 \text{ cm}$ és $T = \frac{26 \cdot 24}{2} = 312 \text{ cm}^2$.
- 627.** Bocsássunk merőleget az x hosszúságú rövidebb alap végpontjából a másik alapra! A levágott derékszögű háromszög oldalai 3, $9 - x$ és x , ahonnan $x = 5 \text{ cm}$. Az átlók hossza $3\sqrt{10} \approx 9,48 \text{ cm}$ és $\sqrt{34} \approx 5,83 \text{ cm}$, a trapéz területe 21 cm^2 .
- 628.** a) Az átlók hossza: 5 egység és $\sqrt{73} \approx 8,54 \text{ egység}$.
 b) A trapéz területe: 18 területegység.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

- 629.** a) A rövidebb alap végpontjából az alapra bocsátott merőleges által levágott derékszögű háromszögnek a hiányzó oldala $10\sqrt{3}$ cm. A trapéz középvonalának ebbe a háromszögbe eső szakasza (mint a háromszög középvonala) $5\sqrt{3}$ cm, így a rövidebb alap $12 - 5\sqrt{3} \approx 3,34$ cm, a hosszabb alap $12 + 5\sqrt{3} \approx 20,66$ cm, a szögek 30° és 150° .
b) $T = 60 \text{ cm}^2$.
- 630.** A területből kiszámítható a trapéz magassága $m = \frac{2T}{a+c} = \frac{720}{60} = 12$ cm, így a szárazak
hossza $b = \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + m^2} \approx 15,6$ cm, az átlóké $e = \sqrt{\left(\frac{3a-c}{2}\right)^2 + m^2} \approx 32,3$ cm.
- 631.** Bontsuk a trapézt 3 háromszögre a köréírt kör középpontjából a csúcsokba behúzott sugarakkal! $K = 25$ cm, $T = \frac{75}{4}\sqrt{3} \approx 32,48 \text{ cm}^2$.
- 632.** a) A paralelogramma oldalai: 6 egység és közelítőleg 17,09 egység.
b) $T = 96$ területegység.
- 633.** Csak az a 3 csúcshoz illeszkedhet a feltételnek megfelelő körre, amely 3 csúcs által meghatározott háromszögnek egyik oldala a paralelogramma rövidebb átlója. A rövidebb átló két egybevágó, 30° -os derékszögű háromszögre osztja a paralelogrammát, melyben a rövidebb befogó fele az átfogónak.
a) A paralelogramma oldalai: $4\sqrt{3}$ és $8\sqrt{3}$ cm.
b) $T = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
- 634.** Használjuk ki, hogy a fél deltoidban létrejött valamennyi háromszög 30° -os derékszögű háromszög!
a) A deltoid oldalai: $\frac{9}{2}$ és $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ egység.
b) A másik átló: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ egység.
c) $T = \frac{81\sqrt{3}}{4}$ területegység.
- 635.** Az oldalakat y -nal és $2y$ -nal, a szimmetriatengely részeit x -szel és $(50-x)$ -szel jelölve felírható a Pitagorasz-tétellel két egyenlet. Az egyenletrendszer megoldásából $x \approx 13,15$, tehát a hosszabb pálcá végétől kb. 13,2 cm-re kell a másik pálcát rögzítenünk.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

636. a) A félátlók aránya is $2 : 5$, így az átlók hossza közelítőleg 4,09 cm és 20,42 cm.
b) A rombusz területe $83,45 \text{ cm}^2$.

637. Legyen x a rövidebb, y a hosszabb oldal hossza! Az aranymetszés szerint

$$\frac{y}{x} = \frac{x+y}{y}, \text{ melyből } y^2 = xy + x^2. x^2\text{-tel osztva } \frac{y}{x}\text{-re másodfokú egyenletet kapunk.}$$

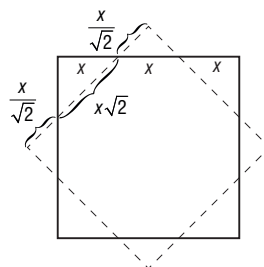
Innen az aranymetszés aránya $\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62$, melyből kifejezhetjük az y -t, és Pitagorasz-tétellel megkaphatjuk a fénykép oldalméreteit: közelítőleg 5,3 cm és 8,5 cm.

7.5. Konvex sokszögek

638. A szabályos hatszög 6 db egybevágó, szabályos háromszögre bontható, ha a szemben lévő csúcsait összekötjük. Ezek alapján...

- a) az egy csúcsból induló átlók közül a hosszabbik kétszerese az oldal hosszúságának, azaz 4 cm, a rövidebb kétszerese a szabályos háromszög magasságának, azaz $2\sqrt{3}$ cm;
- b) az átlók 30° -os szöget zárnak be egymással, mert a hosszabb átló felezi az oldalak által bezárt 120° -os szöget, a rövidebb átlók pedig felezik az oldalak és a hosszabb átló által bezárt szögeket.
- c) egy szabályos háromszög területe $\sqrt{3} \text{ cm}^2$, így a hatszög területe $6\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

639. Használjuk ki, hogy 45° -os derékszögű háromszögben az átfogó a befogó $\sqrt{2}$ -szöröse! Ha x -szel jelöljük az asztal oldalhosszának egyharmadát, akkor az asztal élhossza $3x$, a terítőé $x\sqrt{2} + 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}x$, ami kisebb, mint $3x$, tehát a terítő nem tudja lefedni az asztalt.



640. Legyen K a terítő középpontja, P az egyik sarka és Q a KP szakasz és az asztalél metszéspontja! Az előző feladat alapján $KP = \frac{150\sqrt{2}}{2} = 75\sqrt{2}$ és $KQ = 75 \Rightarrow QP = 75(\sqrt{2} - 1)$, mellyel kiszámítható a lelógó sarok területe, ami megegyezik a fedetlen sarok területével: $QP^2 \approx 965,1$. Így az asztallap fedetlen részének és a teljes asztallapnak a területaránya: $\frac{4 \cdot 965,1}{150^2} = 0,17 = 17\%$.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

641. Az n oldalú sokszög belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180^\circ = 3,5 \cdot 360^\circ$, amiből $n = 9$.

a) A kilencszöget az egy csúcsból húzható átlók $9 - 2 = 7$ háromszögre bontják.

b) Az átlók száma: $\frac{9 \cdot (9-3)}{2} = 27$.

642. $(n-2) \cdot 180^\circ - 360^\circ = 1080^\circ$, amiből $n = 10$. A tízszögnek 35 átlója van.

643. $\frac{n(n-3)}{2} = 6n$, a) amiből $n = 15$. b) A szabályos tizenötszög egy belső szöge $\frac{(15-2) \cdot 180^\circ}{15} = 156^\circ$.

644. A sokszög egy szabályos tizenkétszög. a) Ennek egy belső szöge 150° . b) 54 átlója van.

645. Az $\frac{n(n-3)}{2} = 2016$ egyenletnek nincs pozitív egész megoldása. Mivel egy sokszög oldalainak száma csak pozitív egész szám lehet, ezért nincs ilyen sokszög.

646. $n + \frac{n(n-3)}{2} = 21$ az oldala és az átlók összege. Ebből $n(n-1) = 42$, amiből $n = 7$. Tehát 7 oldala van a sokszögnek.

647. Használjuk fel, hogy egy konvex n -szögnek $\frac{n(n-3)}{2}$ átlója van, és a belső szögeinek összege $(n-2)180^\circ$! Az átló számából kiszámítható, hogy 12 oldalú a sokszög, így egy belső szögének nagysága $\frac{10 \cdot 180^\circ}{12} = 150^\circ$.

648. A belső szögösszegeből kiszámítható, hogy az oldalak száma 9, így az egy csúcsból induló átlók száma 6.

649. Az előző feladatokhoz hasonlóan az átlók száma 65.

7.6. A kör és részei

650. a) 2π rad; π ; $\text{rad } \frac{\pi}{2}$; $\text{rad } \frac{3\pi}{2}$ rad;

b) $\frac{\pi}{6}$ rad; $\frac{\pi}{3}$ rad; $\frac{2\pi}{3}$ rad; $\frac{5\pi}{6}$ rad; $\frac{4\pi}{3}$ rad;



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

c) $\frac{\pi}{12}$ rad; $\frac{\pi}{4}$ rad; $\frac{5\pi}{12}$ rad; $\frac{7\pi}{12}$ rad; $\frac{7\pi}{6}$ rad; $\frac{5\pi}{4}$ rad; $\frac{7\pi}{4}$ rad;

d) $\frac{2\pi}{5}$ rad; $\frac{4\pi}{5}$ rad; $\frac{11\pi}{10}$ rad; $\frac{6\pi}{5}$ rad; $\frac{37\pi}{20}$ rad;

e) $\approx 0,567$ rad; $\approx 2,065$ rad; $\approx 3,220$ rad; $\approx 4,304$ rad.

651. a) 60° ; 300° ; 315° ; 40° ; 96° ;

b) $\approx 171,89^\circ$; $572,96^\circ$; $143,24^\circ$; $11,46^\circ$; $71,62^\circ$.

652. A nagymutató 150° -kal fordul el, ezalatt a kismutató a 12-ed részével, azaz $12,5^\circ$ -kal.

653. Használjuk fel, hogy a nagymutató egy perc alatt $\frac{\pi}{30}$ radián, míg a kismutató $\frac{\pi}{360}$ radián nagyságú szöggel fordul el.

a) $\frac{5\pi}{6}$ rad; b) $\frac{5\pi}{12}$ rad; c) $\frac{19\pi}{24}$ rad; d) $\frac{11\pi}{120}$ rad.

654. A harmadik külső szög 2π rad $-\frac{19}{12}\pi$ rad $=\frac{5}{12}\pi$ rad. A mellette lévő belső szög π rad $-\frac{5}{12}\pi$ rad $=\frac{7}{12}\pi$ rad.

655. a) 180° ; b) 90° ; c) 6° .

656. a) $1:4$; b) $24^\circ:360^\circ=1:15$; c) $\frac{\pi}{4}:2\pi=1:8$; d) $1:3$.

657. A keresett távolság a középpontból a húrra bocsátott merőleges szakasz hossza.

a) $4\sqrt{3}$ egység; b) $4\sqrt{2}$ egység; c) 4 egység.

658. Használjuk ki, hogy a körcikk területe és az ív hossza egyenesen arányos a hozzá tartozó középponti szög nagyságával!

a) $\frac{t}{3^2\pi} = \frac{12^\circ}{360^\circ} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{10} \text{ cm}^2$;

b) $\frac{i}{6\pi} = \frac{12^\circ}{360^\circ} \Rightarrow i = \frac{\pi}{5} \text{ cm}$.

659. $\frac{4\pi}{2r\pi} = \frac{36\pi}{r^2\pi} \Rightarrow r = 18 \text{ cm}$.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

660. Az előző két feladathoz hasonlóan:

a) $r = 6$ cm; b) $r = 15$ cm.

661. a) $r \approx 28,65$ cm; b) $r \approx 14,14$ cm.

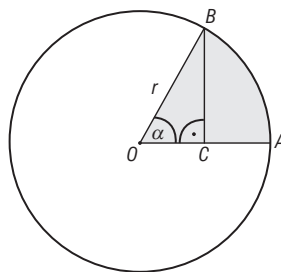
662. $T = \frac{r \cdot i}{2}$ alapján $r = 5$ cm. A középponti szög kb. $91,67^\circ$.

663. $K = 2r + i$ alapján $i = 12$ cm, amihez $49,11^\circ$ -os középponti szög tartozik.

664. A sugár $r = \frac{10}{\pi}$ dm, a körcikk területe $T = \frac{70}{\pi} \text{ dm}^2$.

665. Az ábrán az OBC egy fél szabályos háromszög, így $\alpha = 60^\circ$. A körcikk területe

$$T = \frac{50\pi}{3} \text{ cm}^2.$$



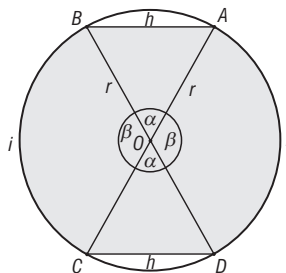
666. Az AB és CD húrok hossza egyenlő a kör sugarával, így az OAB és OCD háromszögek szabályosak, amiből $\alpha = 60^\circ$. A keletkezett síkidom kerülete $K = 2h + 2i$.

Az ívekhez tartozó középponti szög 120° .

$$K = 2 \cdot 16 + 2 \frac{32\pi}{3} = 32 + \frac{64}{3}\pi \approx 67,02 \text{ cm}.$$

A síkidom területe két szabályos háromszög és két 120° -os körcikk területének

$$\text{összege. } T = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} 16^2 + \frac{16^2 \pi}{3} \right) = 128\sqrt{3} + \frac{512}{3}\pi \approx 757,87 \text{ cm}^2.$$



667. $K = 2r_1\pi + 2r_2\pi = 36\pi$ egység és $T = r_1^2\pi - r_2^2\pi = 72\pi$ egységnégyzet. Ezekből $r_1 = 11$ egység és $r_2 = 7$ egység. A középkör sugara $r_k = \frac{r_1 + r_2}{2} = 9$ egység. A kisebb (belső) körgyűrű kerülete 32π egység, területe 32π egységnégyzet.

A nagyobb (külső) körgyűrű kerülete 40π egység, területe 40π egységnégyzet.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

668. Az út adott szakasza egy 90° -os középponti szögű körgyűrűcikk, amelynek területe

$$T = \frac{1}{4}(r_1^2\pi - r_2^2\pi) = \frac{1}{4}(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)\pi, \text{ ahol } r_1 > r_2. \text{ Az út szélessége } r_1 - r_2 = 12 \text{ m.}$$

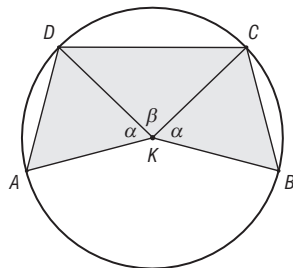
A középvonal sugara $\frac{r_1 + r_2}{2}$, így a hossza $\frac{r_1 + r_2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 372 \text{ m}$. Ezzel az út területe 4464 m^2 .

669. A keletkezett középponti szögek:

$$AKB\angle = \frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ;$$

$$BKC\angle = DKA\angle = \frac{2}{12} \cdot 360^\circ = 60^\circ \text{ és}$$

$$CKD\angle = 90^\circ.$$



a) Az AKD és BCK háromszögek szabályosak, ezért $AD = BC = r = 6$. A DKC háromszög egyenlő szárú és derékszögű, ezért $DC = \sqrt{2} \cdot r = 6\sqrt{2}$. Így az ötszög kerülete $K = 4r + \sqrt{2}r = 24 + 6\sqrt{2}$ egység.

b) Az ötszög területe két szabályos és egy derékszögű háromszög területének összege.

$$T_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 + \frac{r^2}{2} = r^2 \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 36 \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 18(\sqrt{3} + 1) \approx 49,18 \text{ egységnégyzet.}$$

A KA és KB sugár egy 150° -os középponti szögű körcikket vág ki a körből.

$$\text{Ennek területe } T_2 = \frac{36\pi}{360^\circ} \cdot 150^\circ = 15\pi \approx 47,12 \text{ egységnégyzet.}$$

A CB és DA húrok két, azonos méretű körszeletet vágnak le a körből.

$$\text{Ezek területe } T_3 = \frac{36\pi}{360^\circ} 60^\circ - 36 \frac{\sqrt{3}}{4} = 6\pi - 9\sqrt{3} \approx 3,26 \text{ egységnégyzet.}$$

Végül a DC húr által meghatározott körszelet területe

$$T_4 = \frac{1}{4} \cdot 36\pi - \frac{1}{2} \cdot 36 = 9\pi - 18 \approx 10,27 \text{ egységnégyzet.}$$

670. 3 órakor a nagymutató a 12-esre, a kismutató a 3-asra mutat, a közbezárt szögük tehát 90° .

a) 4 órakor a két mutató által bezárt szög $4 \cdot 30^\circ$, ami $\frac{4}{3}$ -szorosa a mostaninak.

b) Másfél óra alatt a nagymutató másfélszer fordul körbe, azaz az általa súrolt terület

$$\text{let } \frac{3}{2} \cdot 10^2 \pi = 150\pi \text{ cm}^2.$$

c) A kismutató $12 \cdot 60$ perc alatt $7^2 \pi$ nagyságú területet súrol, így 75 perc alatt

$$\frac{75}{12 \cdot 60} \cdot 49\pi = \frac{245\pi}{48} \text{ cm}^2\text{-t.}$$



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

- d) 12 óra alatt a kismutató $49\pi \text{ cm}^2$ nagyságú területet sűrol, a nagymutató pedig $12 \cdot 10^2 \pi \text{ cm}^2$ -t, azaz $\frac{1200}{49}$ -szer nagyobb.

671. A szárazon maradt rész területe (x -szel jelölve a kert hosszát):

$$x^2 - 4 \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2 \pi = x^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right), \text{ ami a kert területének } 1 - \frac{\pi}{4} \approx 21,5\% \text{-a.}$$

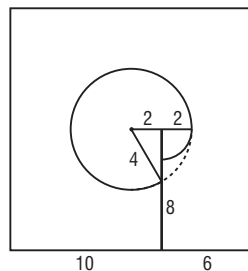
672. a) $\frac{16^2 - 16\pi}{16^2} \cdot 100\% \approx 80,4\%$

b) A fal miatt az őrzött terület egy 4 m sugarú 300° -os kö-

zépponti szögű körcikk, egy 2 m sugarú negyedkör és egy 4 m átfogójú 30° -os derékszögű háromszög terü-

téből adódik össze: $\frac{5}{6} 4^2 \pi + \frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} 2^2 \pi \approx 48,47 \text{ m}^2$

így a macska számára a területnek $\frac{16^2 - 48,47}{16^2} \cdot 100\% \approx 81,1\%$ -a biztonságos.



673. Jelölje x a négyzet oldalát!

a) $\frac{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi}{x^2} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0,21$ része;

b) A satírozott részt átdarabolva: $\frac{\frac{x^2 \pi}{4} - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \approx 0,29$ része;

c) A négyzet átlóit behúzva a kialakuló 45° -os derékszögű háromszögek segítségével a középső kis kör sugara $x - \frac{x}{\sqrt{2}}$, így a kérdéses területarány:

$$\frac{2 \cdot \left(\frac{x^2 \pi}{4} - \frac{x^2}{2}\right) - \left(x - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 \pi}{x^2} \approx 0,3.$$

674. A körgyűrű területe: $26^2 \pi - 20^2 \pi = 276\pi \text{ cm}^2$.

675. Jelölje r a legbelső kör sugarát!

a) $\frac{(4r)^2 \pi - (3r)^2 \pi}{(5r)^2 \pi} = 28\%$.

b) 9-szerese.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

676. Az előző feladathoz hasonlóan:

a) közelítőleg 5,2%-a;

b) $\frac{49}{4}$ -szeresére nő a pupilla nyílás területe, és közelítőleg 41,6%-ára zsugorodik a szivárványhártya területe.

677. A középponti és kerületi szögek tétele alapján a körívhez tartozó középponti szög nagysága $\frac{2}{3} \cdot 108^\circ = 72^\circ$, így az arány 1 : 5.

678. a) $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$; b) 45° ; c) 36° ; d) 180° .

679. a) 1 : 2; b) 1 : 6; c) 1 : 30; d) 1 : 1; e) csak π -nél nem nagyobb kerületi szög lehetséges.

680. A szabályos ötszög oldalai egyenlő nagyságú köríveket vágnak ki a köré írt körből, így a hozzájuk tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak.

681. Az előző feladat alapján az egy csúcsból induló 5 átló 6 egyenlő részre osztja a nyolcszög egy belső szögét, ami $\frac{6 \cdot 180^\circ}{8}$ nagyságú, azaz $22,5^\circ$ -os szögekre.

682. A két vastagított ív valamely két átellenes végpontját összekötve megjelennek a 20° és 40° fokos kerületi szögek, és egy olyan háromszög, melyre felírhatjuk a külső szögre vonatkozó tételt:

a) $\alpha = 40^\circ + 20^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$;

b) $40^\circ = 20^\circ + \alpha \Rightarrow \alpha = 20^\circ$.

683. Az előző feladathoz hasonlóan a keresett szög 16° .

684. K -val jelölve a kör középpontját, a KEP derékszögű háromszögből $\angle PKE = 64^\circ$, mely az AE ívhez tartozó középponti szög, így az ugyanezen ívhez tartozó ABE kerületi szög nagysága 32° , a $\angle BEP$ pedig 122° .

685. A háromszög szögei kerületi szögek a körben, melyek aránya egyenlő a hozzájuk tartozó ívhosszak arányával:

$$\alpha = \frac{4}{15} \cdot 180^\circ = 48^\circ, \text{ hasonlóan } \beta = 60^\circ \text{ és } \gamma = 72^\circ.$$



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

686. Az előző feladathoz hasonlóan:

$$\alpha = \frac{2+5}{2+4+7+5} \cdot 180^\circ = 70^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 110^\circ \text{ és } \delta = 120^\circ.$$

687. a) Jelöljük az érintők által meghatározott háromszög A -val szemközti csúcsát P -vel, a B -vel szemközti Q -val, a C -vel szemközti pedig R -rel!

$PBC\angle = PCB\angle = \alpha$, mert a BC ívhez tartozó kerületi szögek. Hasonlóan

$QCA\angle = QAC\angle = \beta$ és $RAB\angle = RBA\angle = \gamma$.

b) Jelöljük P -vel, Q -val és R -rel az α , β és γ szögfelezője által a körön kimetszett

pontokat! Az $RPQ\angle$ a QA és AR ívekhez tartozó kerületi szögek összege, azaz

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}, \text{ hasonlóan } PQR\angle = \frac{\alpha + \gamma}{2} \text{ és } QRP\angle = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

688. Az AB -hez tartozó legnagyobb magasságú háromszög területe a maximális, azaz amelynek a magassága illeszkedik a kör középpontjára, azaz az AB alapú, egyenlő

szárú háromszögé! Az alaphoz tartozó magasság hossza: $5 + 5 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 9,33$ cm, így a maximális terület közelítőleg: $23,33$ cm².

7.7. Látószög

689. A keresett pontthalmaz két ún. látószögműkörív.

a) A 30° -os látószögműkörív K középpontját megkapjuk, ha AB mindkét végpontjába 60° -os szöget mérünk fel, majd ebből a középpontból KA sugárral körvesszünk AB K felőli oldalán A -tól B -ig. A kapott körívet tükrözzük AB -re!

b) Az előzőhöz hasonlóan járunk el.

c) Az előzőkhöz hasonlóan (AB végpontjaiba $\frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$ nagyságú szögeket mérve fel).

690. Az adott oldalra megszerkesztjük az adott szögű látószögműkörívet, melyre az oldal felezőpontjából a súlyvonal hosszával körvesszve megkapjuk a háromszög harmadik csúcsát.

691. a) r hosszú húrhoz 60° -os középponti szög tartozik, illetve 30° -os kerületi szög, így a nagyobbik ív pontjaiból 30° -os szögben látszik.

b) $r\sqrt{2}$ hosszú húrhoz 90° -os középponti szög tartozik, tehát 45° -os szögben látszik.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

692. A húrhoz tartozó középponti szög 90° , így a húr és a végpontjaiba húzott sugarak egy 45° -os derékszögű háromszöget határoznak meg, melynek az alaphoz tartozó magassága a keresett távolság közelítőleg: 49,5 mm.
693. A keresett látószögek kerületi szögek, melyek nagysága egyenesen arányos a hozzájuk tartozó ívhosszal. Ezek alapján a nagyobbik ív pontjaiból a látószög $\frac{2}{5} \cdot 180^\circ = 72^\circ$, a kisebbik ív pontjaiból 108° .
694. A 30° -os látószögből adódik, hogy a hídhoz mint húrhoz tartozó középponti szög 60° -os, így a kör sugara épp a híd hossza, amit jelöljünk x -szel! A lemerített terület alapján $92 = 2x\pi \Rightarrow x \approx 14,6$ m.
695. A két látószöghöz, mint kerületi szöghöz tartozó középponti szögek egy teljes szöget alkotnak, így a látószögek összege 180° , azaz a másik ív pontjaiból $180^\circ - \alpha$ szög alatt látszik a húr.
696. A Thalész-tétel értelmében az $\angle ACB = 90^\circ$, így az $\angle ABC = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$, ami az AC húr látószöge a nagyobbik ív pontjaiból. A másik ív pontjaiból a látószög 132° (lásd az előző feladatot).
697. CA átló látószöge és az $\angle ABC$ ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögek. Az $\angle ABC$ az ötszög egy belső szöge, azaz 108° . CE átló látószöge pedig ugyanakkora, mint az AC átlóé az általa létrehozott nagyobbik ív pontjaiból, tehát 72° .

7.8. Húrnégyszögek, érintőnégyszögek

698. a) igaz; b) hamis; c) hamis; d) igaz; e) hamis, f) igaz.
699. A húrnégyszögek tétele értelmében a megadott két szög nem lehet szemben egymással, így a hiányzó szögek: 117° és 73° .
700. A húrnégyszög szögei: 106° , 74° és 94° .
701. a) Az átló és két oldal által közbezárt háromszög megszerkeszthető, így a köré írt kör is, melyen a harmadik oldal segítségével kimetszhető a negyedik csúcs.



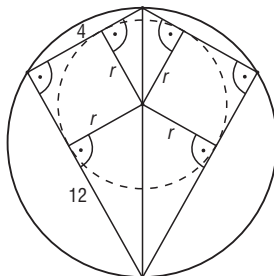
7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

- b) Az egyik oldalból, a rajta fekvő szögből és az átlóból megszerkeszthető egy háromszög, innen befejezhető a szerkesztés.
- c) A megfelelő átló adott szögű látószög körívének megszerkesztésével megkapjuk a köréírt kört, melyen az adott oldal és a másik átló segítségével megkapjuk a hiányzó két csúcsot.
- 702.** A magasság definíciója szerint a vizsgált négyszög két szemközti szöge 90° , azaz kiegészítő szögek, így a belső szögösszeg miatt a másik két szög is az, tehát húrnégyszög.
- 703.** Bármely szabályos sokszögnek létezik köréírt köre, és az oldalfelező pontjai egyenlő távolságra vannak ezen kör középpontjától, azaz egy körön helyezkednek el. Ezek alapján bármely 4 csúcs, illetve bármely 4 oldalfelező pont definíció szerint húrnégyszöget határoz meg.
- 704.** a) igaz; b) hamis; c) igaz; d) igaz; e) igaz.
- 705.** A hiányzó oldalakat $3x$ -szel és $4x$ -szel jelölve az érintőnégyszögek tétele alapján: $3x + 80 = 4x + 73$, ahonnan az oldalak hossza: 21 és 28 mm.
- 706.** A rövidebb szár hossza a beírt kör átmérője, azaz 2,4 cm. Az érintőnégyszögek tétele szerint a szárak összege egyenlő az alapok összegével, ami a középvonal kétszerese, tehát 8,6 cm. Így a hosszabbik szár $8,6 - 2,4 = 6,2$ cm hosszúságú.
- 707.** a) A beírt kör átmérője a négyzet oldala, így a sugár $\frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,54$ cm.
- b) A beírt kör átmérője a rombusz magassága. A rombuszt két szabályos háromszögre osztja a rövidebb átlója, ezek magassága a rombusz magassága, így a sugár: $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$ cm.
- c) A beírt kör átmérője a trapéz magassága, melyet jelöljünk m -mel, a trapéz hosszabbik szárát pedig x -szel! Az érintőnégyszögek tételével és a Pitagorasz-tétellel felírható egy kétismeretlenes egyenletrendszer: $m + x = 4 + 8$ és $m^2 + 4^2 = x^2$, ahonnan $m = \frac{16}{3}$, azaz a sugár $\frac{8}{3}$ egység.
- d) A beírt kör középpontja a szimmetriaátlón van. A középpontból a deltoid oldalaira bocsátott merőleges szakaszok a kör sugarai (jelöljük r -rel!), melyek egy r oldalhosszúságú négyzetet vágnak ki a deltoid derékszögű csúcsánál. A szimmetriaátló, a két behúzott sugár és a deltoid oldalai alkotta két kis derékszög-



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

gű háromszög átfogóinak összege a szimmetriaátlót adja: $\sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = \sqrt{(4-r)^2 + r^2} + \sqrt{(12-r)^2 + r^2}$. Az egyenlet megoldásaként a sugár 3 egység. (A két kis derékszögű háromszög hasonlóságából lényegesen egyszerűbben adódik ez az eredmény.)



708. Mivel a szabályos hatszög tengelyesen szimmetrikus bármely oldalfelező merőlegesére, kiválasztható 4 oldalfelező pont, melyek deltoidot határoznak meg, és így érintőnégyzöget alkotnak.

7.9. Geometriai transzformációk

709. a) igaz; b) igaz; c) hamis; d) hamis; e) hamis; f) igaz.

710. a) hamis; b) igaz; c) igaz; d) hamis; e) igaz; f) hamis.

711. a) hamis; b) igaz; c) igaz; d) igaz; e) igaz.

712. a) Tükrözzük valamelyik golyónak megfelelő pontot az egyik oldalra, és a képét kössük össze a másik ponttal! Az összekötő szakasz és az oldal metszéspontja az a pont, ahol a golyónak érintenie kell az asztal szélét.

b) Az előzőhöz hasonlóan járunk el, mindkét pontot tükrözzük két szemközti, vagy két szomszédos oldalra!

713. A partra merőlegesen, a folyó szélességével toljuk el az egyik falut jelképező pontot a másik falu irányába! Az így kapott képpontot kössük össze a másik falut szimbolizáló ponttal! Ez az összekötő szakasz kimetszi a folyó túlsó partján egyeneséből az építendő híd végpontját.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

- 714.** A szerkesztendő egyenes szögcsúszak közé eső része középpontosan szimmetrikus a megadott pontra, ezért valamelyik szögcsúszak tükrözve e pontra, a képegyenes kimetszi a másik szögcsúszakból a szakasz egyik végpontját.
- 715.** A négyzet az átlók metszéspontjára nézve 90° -os forgásszimmetriával bír, ezért az egyik megadott pontot a metszéspont körül 90° -kal elforgatva a képpont és a másik megadott pont meghatározzák a négyzet egyik oldalegyenesét. Innen már könnyen befejezhető a szerkesztés.
- 716.** Használjuk ki az egyenlő szárú háromszög tengelyes szimmetriáját!
- Tükrözzük az egyik megadott pontot a tengelyre! A képpont és a másik megadott pont meghatározzák az egyik szár egyenesét.
 - A szárszög egyik szárával sugárnyi távolságban húzott párhuzamos egyenes kimetszi a szárszög szögfelezőjéből a beírt kör középpontját.
 - A megadott száregyenes egy tetszőleges pontjába vegyük fel a szárszöget, majd a kapott szögcsúszakkal húzzunk párhuzamost a száron megadott ponton keresztül! Az így létrejött szárszög szögfelezőjére bocsássunk merőlegest az alapon megadott ponton keresztül!
- 717.** a) A rövidebb alap végpontján keresztül a másik szárral párhuzamost húzva egy paralelogrammára és egy háromszögre bontjuk a trapézt. A megadott adatokból ez a háromszög megszerkeszthető, ahonnan eltolással a trapéz megszerkeszthető.
b) Az előzőhöz hasonló a szerkesztés menete.
- 718.** Mindhárom szerkesztés a középpontos tükrözésre épül.
- A c oldal felezőpontjára tükrözve a háromszöget a kapott paralelogramma megszerkeszthető (két oldalából és egy átlójából).
 - A b oldal felezőpontjára tükrözzük a háromszöget! Az így kapott paralelogramma a megadott adatok alapján megszerkeszthető.
 - Kihasználva, hogy az S súlypont harmadolja a súlyvonalakat, tükrözzük S -et pl. az AB oldal felezőpontjára! Az így létrejövő $AS'BS'$ négyszög paralelogramma, ezért az $AS'S$ háromszög oldalai $\frac{2}{3}s_b$, $\frac{2}{3}s_c$ és $\frac{2}{3}s_a$, tehát megszerkeszthető. Innen már könnyen befejezhető a megoldás.
- 719.** a)–b) Alkalmazza a középpontos hasonlósági transzformáció hozzárendelési szabályát!
c) A kapott háromszög a középvonal-háromszög.
- 720.** Az előző feladat c) pontja alapján megoldható.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

721. Alkalmazza a középpontos hasonlósági transzformáció hozzárendelési szabályát!

722. a) Használja ki a szerkesztésnél, hogy bármely szakasz és a képe párhuzamos (azaz pl. $C'D' = AD'$ párhuzamos CD -vel)!

b) – ha P a C -hez közelebbi negyedelő pont, akkor $\lambda = -\frac{C'P}{CP} = -\frac{AP}{CP} = -3$.

– ha P a C -től távolabbi negyedelő pont, akkor $\lambda = -\frac{C'P}{CP} = -\frac{1}{3}$.

723. a)–c) A hasonlóság centruma, a pont és a képe definíció szerint egy egyenesre esnek, ezért C képét megszerkesztve a CC' egyenes kimetszi az AA' , azaz az AB egyenesből a hasonlóság centrumát (O). (C' -t megkapjuk, ha A' -n keresztül AC -vel, B' -n keresztül BC -vel párhuzamost szerkesztünk.)

b) $\frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA}$, másként $\frac{OB'}{OB' + \frac{c}{4}} = \frac{\frac{c}{4} - OB'}{\frac{3}{4}c - OB'}$, ahonnan $OB' = \frac{c}{12}$ adódik, így

$$\lambda = \frac{OB'}{OB} = \frac{\frac{c}{12}}{\frac{c}{12} + \frac{c}{4}} = \frac{1}{4}.$$

724. Legyenek a háromszög csúcsai A, B, C ! Először szerkesszünk egy olyan négyzetet, mely oldalával pl. az AB oldalra, egy csúcsával pedig a BC oldalra illeszkedik! BC oldal egy tetszőleges (B -hez közelebbi) pontjából merőlegest bocsátva az AB oldalra, megkapjuk a négyzet egyik oldalát, melyből a keresett négyzet egy kicsinyített (vagy nagyított) képét könnyen megszerkeszthetjük. Ennek a kis (vagy nagy) négyzetnek az oldalakra nem illeszkedő negyedik csúcsát B -ből – mint hasonlósági centrumból – annyira nagyítjuk (vagy kicsinyítjük), hogy a képe éppen ráessen a háromszög AC oldalára. Innen már befejezhető a szerkesztés.

725. Szerkesszünk egy a szögcsúcsát érintő, tetszőleges méretű kört! Ennek a körnek a szög csúcsára vonatkozó nagyítása/kicsinyítése a keresett kör. (A tetszőlegesen felvett körön a szögtartás kihasználásával megkeressük a megadott pont képét...) Minden esetben két megoldást kapunk.

726. Kössük össze P -t k középpontjával! Az összekötő egyenes és k P -hez közelebbi metszéspontja legyen E , melynek képe (E') a feltétel szerint a P -től távolabbi metszéspont. Jelöljük ki k egy tetszőleges Q pontját, melynek Q' képét a szögtartás segítségével megszerkeszthetjük PEQ -et átmásoljuk PE' -re E' -ben, ez a szögcsúcs kimetszi PQ egyenesből Q' -t. $E'Q'$ húr felezőmerőlegese kimetszi a PE egyenesből a k' kör középpontját.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

727. Legyen a két kör középpontja O_1 és O_2 , P pedig az egyik kör tetszőleges pontja, ami nem esik a két kör középpontján átmenő egyenesre! Az O_1P sugárral húzzunk párhuzamost O_2 ponton keresztül! Ez a másik körből kimetszi a Q és R pontokat. Az O_1O_2 egyenes és a PQ , illetve PR egyenesek metszéspontjai lesznek a keresett hasonlósági pontok. Azt a hasonlósági pontot, amely az O_1O_2 szakaszra illeszkedik, belső hasonlósági pontnak nevezzük, a másik a külső hasonlósági pont. A szerkesztés a körök helyzetétől függetlenül végrehajtható. Ha a két kör koncentrikus, akkor a két hasonlósági pont egybeesik a közös középponttal. Minden más esetben két különböző pontot kapunk.

728. A közös külső, illetve belső érintők illeszkednek a külső, illetve belső hasonlósági pontra. Így elég az egyik körhöz érintőt szerkesztteni az adott pontból, az közös érintő lesz.

Legyen a két kör sugara r_1 és r_2 ($r_1 > r_2$), a két középpont távolsága d !

A közös érintők száma:

- 4, ha $r_1 + r_2 < d$;
- 3, ha $r_1 + r_2 = d$;
- 2, ha $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$;
- 1, ha $r_1 - r_2 = d$;
- 0, ha $0 \leq d < r_1 - r_2$.

729. Először a két határoló sugarat érintő kört szerkesztünk, majd a szög csúcsából akkorára nagyítjuk, hogy érintse a körívet is.

730. A sugarak végpontjai (A , B) által meghatározott egyenesre mérjük fel a húrt mindkét irányban A -n és B -n túl! A kapott végpontokat a kör középpontjával összekötő szakaszokból a kör kimetszi a keresett húr két végpontját.

731. Használjuk fel a középpontos hasonlósági transzformáció tulajdonságait!

a) Legyen A_1 , B_1 , C_1 a háromszög oldalainak felezőpontja! Az A középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú hasonlósági transzformáció B pontot C_1 pontba, C pontot pedig B_1 pontba viszi át. Így B_1C_1 párhuzamos BC -vel és a hossza a BC szakasz hosszának fele. Hasonlóan belátható a másik két középvonalra is az állítás.

b) Legyen AA_1 és BB_1 metszéspontja S ! Az S középpontú $\lambda = -2$ arányú hasonlósági transzformációval belátható, hogy S harmadolja mindkét szakaszt.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

7.10. Hasonlóság

732. Alkalmazzuk a párhuzamos szelők, illetve szelőszakaszok tételét!

$$\frac{6}{5} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = \frac{36}{5} = 7,2; \quad \frac{y}{3} = \frac{11}{5} \Rightarrow y = \frac{33}{5} = 6,6.$$

733. $\frac{x+3}{x} = \frac{12}{7} \Rightarrow x = 4,2; \quad \frac{y+5}{y} = \frac{12}{7} \Rightarrow y = 7.$

734. Legyen D tetszőleges pontja a BC oldalnak, az AD és a B_1C_1 középvonal metszéspontja P ! Mivel C_1 felezőpont és $C_1P \parallel BD$, ezért C_1P középvonala az ABD háromszögnek, vagyis P felezőpontja az AD szakasznak.

735. Legyen a trapéz hosszabbik alapja $AB = 12$, rövidebb alapja DC , a szárak ($BC = 3$, $AD = 7$) egyenesének metszéspontja M ! Mivel $AB \parallel DC$, írjuk fel a párhuzamos szelőszakaszok tételét:

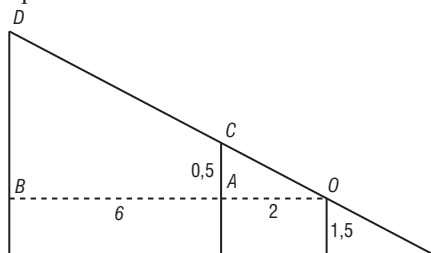
$$MD = 4 \text{ esetben } \frac{AB}{DC} = \frac{MA}{MD} \Rightarrow DC = \frac{48}{11}, \text{ illetve } \frac{MC}{MB} = \frac{DC}{AB} \Rightarrow MC = \frac{12}{7};$$

$$MC = 4 \text{ esetben } DC = \frac{48}{7} \text{ és } MD = \frac{28}{3}.$$

736. Legyen az $ABCD$ trapéz két szárának az AB hosszabbik alaphoz közelebbi harmadolópontja P és Q ! Az AC átló és a PQ szakasz metszéspontja M úgy, hogy $PM = 1,5$, illetve $MQ = 9$. A párhuzamos szelők tételének megfordítását alkalmazva lássuk be, hogy $PQ \parallel AB \parallel CD$! Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a CAD , illetve ACB szögekre, amiből $DC = 4,5$ és $AB = 13,5$!

737. Írjuk fel a párhuzamos szelőszakaszok tételét! A torony árnyéka 10 m.

738. Az ábrán látható szaggatott párhuzamos berajzolásával a keletkezett szögre írjuk fel a párhuzamos szelőszakaszok tételét!



A fa magassága 3,5 m.

$$\frac{DB}{CA} = \frac{BO}{AO} \Rightarrow DB = 2$$



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

739. Az előző feladat szerint 4 m-re van a megfigyelő.

740. Az előzőek szerint 5,25 m magas a középső fa.

741. Mivel a rombusz ($APQR$) szemközti oldalai párhuzamosak, alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét (P az AB -re, Q a BC -re, R az AC -re illeszkedik)!

$$\frac{AC}{RC} = \frac{AB}{RQ} \Rightarrow \frac{9}{9-AR} = \frac{6}{AR} \Rightarrow AR = 3,6. \text{ A rombusz oldala } 3,6.$$

A rombusz AQ átlója egyben szögfelező is, így $\frac{CQ}{QB} = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. Innen

$$CQ = \frac{3}{5}CB = \frac{21}{5} \text{ és } QB = \frac{2}{5}CB = \frac{14}{5}.$$

742. Használjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az egyik hegyesszögre!

a) Két megoldás van attól függően, hogy a téglalap hosszabbik oldala melyik befogóval párhuzamos.

A téglalap oldalai 6 és 9 cm, vagy 5,4 és 8,4 cm hosszúak.

b) Az első esetben felezőpont, a második esetben 3 : 7 arányban osztó pont.

743. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt! A 3 egység hosszú oldalt $\frac{18}{11}$ és $\frac{15}{11}$, az 5 egység

hosszú oldalt $\frac{5}{3}$ és $\frac{10}{3}$, a 6 egység hosszú oldalt pedig $\frac{15}{4}$ és $\frac{9}{4}$ hosszú részekre

bontja a szögfelező.

744. Az adott szögfelező az alapon fekvő szöget felezi, mivel két különböző részre bontja a szemközti oldalt. A szár hossza így $b = 7,5$ cm.

a) A szögfelezőtétel szerint $\frac{a}{7,5} = \frac{3}{4,5}$, amiből $a = 5$ cm, vagy $\frac{a}{7,5} = \frac{4,5}{3}$, amiből $a = 11,25$ cm.

b) A szögfelező a magasságot $\frac{a}{2} : b$ arányban osztja. Az első esetben 1 : 3, a második esetben 3 : 4 arányban, azaz közelítőleg 1,77 és 5,3, illetve 2,13 és 2,83 cm hosszúságú részekre.

745. Legyen a háromszög alapja a , szára b ($a > b$)! Ha a szögfelező harmadolja a szarat, akkor a szögfelezőtétel szerint $a = 2b$, ami ellentmond a $b + b > a$ háromszög-egyenlőtlenségnek.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

746. Számoljuk ki az átfogót, majd alkalmazzuk a szögfelezőtételt, és Pitagorasz tételével számítsuk ki a szögfelezőszakasz hosszát! A szakasz hossza $4\sqrt{10}$.

747. a) Legyen az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög BC befogójának és az α szög szögfelezőjének metszéspontja D !

$$BD + DC = 1 \text{ és } BD : DC = \sqrt{2} : 1, \text{ ezekből } BD = 2 - \sqrt{2} \text{ és } DC = \sqrt{2} - 1.$$

b) Az $\alpha = 45^\circ$ -os szöget három egyenlő részre osztó két félegyenes metssze CB befogót H (C -hez közelebb), illetve E pontban! A $CAE \sphericalangle = 30^\circ$, így az ACE háromszög leghosszabb oldala (AE) kétszerese a legrövidebb oldalnak (EC).

$$\text{Ebből } EC = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ és } AE = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \text{ Írjuk fel ebben a háromszögben a szögfelező-}$$

$$\text{tételt: } HC : HE = 1 : \frac{2\sqrt{3}}{3}! \quad EC = HC + HE = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ amiből a kérdéses szakaszok}$$

$$HC = 2 - \sqrt{3}, \quad HE = \frac{4\sqrt{3} - 6}{3} \text{ és } BE = 1 - (HE + HC) = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}.$$

c) Az a)-beli eredményeket felhasználva az AD szögfelezőszakasz hossza számolható. $AD = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$. Alkalmazzuk ezután az ACD és ADB háromszögben is a szögfelezőtételt! A keresett szakaszok hossza közelítőleg 0,2; 0,22; 0,25 és 0,33 egység.

748. Legyen $a < b$! Mérjük fel a C csúcsból a -t a CA oldalra ($CH = a$)! CHB háromszög egyenlő szárú, így a $BCH \sphericalangle$ szögfelezője merőleges HB -re. A CD külső szögfelező szintén merőleges ez előbbi belső szögfelezőre, így $HB \parallel CD$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét CAD szögére! $DB : AD = CH : CA = a : b$

749. a) igaz; **b)** igaz; **c)** hamis; **d)** hamis; **e)** igaz.

750. Az ember magasságát h -val jelölve: $\frac{h}{120} = \frac{26}{16}$, amiből $h = 195$ cm.

751. 3,64 km

752. A trapéz átlói a párhuzamos oldalak arányában osztják egymást.
Az arány $54 : 36 = 3 : 2$.

753. A hosszabbik alap 12,5 cm (lásd az előző feladatot).



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

754. Legyen az $ABCD$ trapéz átlóinak metszéspontja M ! Az M ponton átmenő, alapokkal párhuzamos egyenes az AD szarat P , a BC szarat Q pontban metszi. $AM : MC = BM : MD = 12 : 6 = 2 : 1$. Alkalmazzuk a CAD , illetve az ACB szögekre a párhuzamos szelőszakaszok tételét!

$$\frac{PM}{6} = \frac{AM}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow PM = 4 \text{ és } \frac{MQ}{12} = \frac{CM}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow MQ = 4.$$

A kérdéses szakasz hossza tehát 8 cm.

755. Az előző gondolatmenet szerint: $PM = MQ = \frac{a \cdot c}{a + c}$.

756. Legyen a trapéz középvonala PQ , illetve az átlók felezőpontja F és E ! Mivel F és E illeszkedik a középvonalra, PF az ACD , EQ pedig a BCD háromszög középvonala.

$$\text{Így } EF = PQ - (PF + EQ) = \frac{73 + 25}{2} - 2 \cdot \frac{25}{2} = 24 \text{ mm.}$$

757. $3,5 + 2b = \frac{1}{4} \cdot 38 \Rightarrow b = 3$. A szárazak 3 cm hosszúak.

758. Az átfogó közelítőleg 21,21 cm, a befogók közelítőleg 15 cm hosszúak.

759. Legyen a két háromszög hasonlóságának aránya λ !

$$\text{a) } \lambda = \frac{25}{40} = \frac{b'}{30} = \frac{c'}{20} \Rightarrow b' = 18,75 \text{ és } c' = 12,5;$$

$$\text{b) } \lambda = \frac{K'}{K} = \frac{135}{90} = \frac{3}{2} \Rightarrow a' = 30 \quad b' = 45 \quad c' = 60;$$

$$\text{c) } \lambda = \frac{a' - c'}{a - c} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \Rightarrow a' = 5 \quad b' = 7,5 \quad c' = 10.$$

760. a) Vegyük észre, hogy a háromszög derékszögű, így a háromszög területe:

$$T = \frac{27 \cdot 36}{2} = 486, \text{ melyből a legrövidebb (az átfogóhoz tartozó) magasság:}$$

$$m_c = \frac{2T}{c} = 21,6. \text{ A hozzá hasonló háromszög legkisebb magasságából a hason-}$$

$$\text{lóság aránya: } \lambda = \frac{14,4}{21,6} = \frac{2}{3}, \text{ amivel a háromszög oldalai: 18, 24 és 30.}$$

$$\text{b) A területek aránya } \frac{T'}{T} = \lambda^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

761. A megadott rombusz oldala $a = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$, amiből a kerülete 100 cm. A hasonlóság aránya $\lambda = 2,5$. A hasonló rombusz átlói 35 cm és 120 cm.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

762. A telek mérete $30 \text{ m} \times 25 \text{ m}$.

763. A tábla átlója $\sqrt{5}$, amiből $\lambda = \sqrt{5}$. A területek aránya $\lambda^2 = 5$. A tábla területe 5-ször akkora, mint a faliújságé.

764. A hasonló háromszögek szögei páronként egyenlők, amiből a szögek 72° , 72° , 36° .

765. Mivel a háromszög területe $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{m_b}{m_a} \left(= \frac{1}{2} \right) \Rightarrow b = 2a$.
Az $\left(\frac{a}{2} \right)^2 + m_a^2 = b^2$ összefüggésből $a = \frac{2m_a}{\sqrt{15}}$, amiből $T = \frac{m_a^2}{\sqrt{15}} = \frac{64}{\sqrt{15}} \text{ cm}^2$.

766. A megadott hegyesszögű háromszög esetén a vágással kapott 2 háromszög közül az egyik biztosan tompaszögű, tehát nem lehet hasonló az eredetihez. Az ADC és ABC háromszögek hasonlóságából $AD = \frac{12^2}{16} = 9$.

767. A levágott paralelogramma hosszabbik oldala 3 cm , a rövidebb oldal legyen $x \text{ cm}$!
A hasonlóságból $\frac{7}{3} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{9}{7}$. Az egyenes tehát $\frac{9}{7}$ és $\frac{40}{7} \text{ cm}$ hosszú részekre osztja a paralelogramma oldalát.

768. Az előzőek szerint legyen x a kisebb téglalap rövidebb oldala!

a) $x = \frac{6^2}{10} = 3,6$. A téglalap hosszabbik oldalát $3,6$ és $6,4 \text{ cm}$ -es részekre osztja a metsző egyenes.

b) A két keletkezett téglalap nem hasonló, mert $\frac{6}{3,6} \neq \frac{6,4}{6}$.

769. Az előzőeket használjuk fel!

a) A téglalap két oldala $\frac{a^2}{b}$, illetve a ;

b) A területek aránya $\frac{a^2}{b^2}$.

770. Két eset lehetséges a paralelogramma oldalhosszainak felcserélhetősége miatt. Használjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét! A háromszög két oldala $AC = 10 \text{ cm}$ és $BC = 5 \text{ cm}$, vagy $AC = \frac{10}{3} \text{ cm}$ és $BC = 15 \text{ cm}$.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

771. Az alappal párhuzamos egyenes az eredeti háromszöghöz hasonló háromszöget vág le. A hasonló síkidomok területének aránya egyenlő a hasonlóság arányának négyzetével. Legyen T az eredeti háromszög területe!

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{2} = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b' = \lambda \cdot b = 20\sqrt{2}$$

A száron mérve az alaptól $40 - 20\sqrt{2}$ egység távolságra kell a párhuzamost húzni.

772. Az előzőek szerint az egyenes szárak közé eső szakasza $5\sqrt{2}$ cm.

773. Legyen T_1 a kiegészítő háromszög, T_2 a trapéz területe! Használjuk fel, hogy a kiegészítő háromszög és a keletkezett háromszög hasonló!

$$\frac{T_1}{T_1 + T_2} = \lambda^2 = \left(\frac{15}{25}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow T_2 = \frac{16}{9} T_1 = \frac{320}{3} = 106,6$$

A trapéz területe közelítőleg $106,7 \text{ cm}^2$.

774. A rövidebb alap $c = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 86,6 \approx 50 \text{ mm}$.

775. A **770.** feladathoz hasonló a megoldás menete.

- a) A két párhuzamosnak a háromszögbe eső szakasza 10 és 4,5.
- b) A négyszög területét megkapjuk, ha az ABC háromszög területéből kivonjuk a keletkezett, eredetihez hasonló két háromszög területét.

$$T_{\square} = T_{\triangle} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 T_{\triangle} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 T_{\triangle} = \frac{15}{32} T_{\triangle}$$

776. Az előzőek szerint:

- a) A keletkezett trapéz szárai $\frac{25}{3}$ és $\frac{29}{3}$ cm.
- b) $T_{\triangle} = \frac{9}{5} T_{\text{trapéz}}$.

777. A **771.** feladat alapján a száron mérve a csúcstól 4,2 cm-re kell az alappal párhuzamost húzni.

778. 4-szerese.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

779. Legyen a két kör középpontja O_1 és O_2 , a közös érintőn levő megfelelő érintési pontok E_1 és E_2 , P pedig a körök középpontját összekötő egyenes és a közös érintő metszéspontja! Használjuk fel, hogy $O_1E_1 \parallel O_2E_2$!

$$\text{a) } \frac{r_2}{r_1} = \frac{PO_1 + r_1 + r_2}{PO_1} \Rightarrow r_2 = 7,5.$$

$$\text{b) } PE_1 = \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ és } \frac{E_1E_2}{PE_1} = \frac{O_1O_2}{PO_1} \Rightarrow E_1E_2 = 3\sqrt{10}.$$

780. Az előző feladat szerint:

a) a kisebb kör középpontjától 24 cm-re lévő pontból;

b) a közös érintőszakasz hossza $4\sqrt{15}$ cm.

781. Közös *külső* érintő a kisebb kör középpontjától 28 cm-re lévő pontból húzható a körökhöz.

Közös *belső* érintő pedig a két kör középpontját összekötő szakaszon a kisebb kör középpontjától 12 cm-re lévő pontból.

782. Legyen az AB alap felezőpontja F , a beírt kör középpontja K , és a BC száron lévő érintési pont E ! Az ACF derékszögű háromszögből CF számolható: $CF = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Használjuk fel, hogy a CFB és a CKE háromszögek hasonlóak!

$$\frac{KE}{FB} = \frac{CK}{CB} \Rightarrow \frac{r}{5} = \frac{12-r}{13} \Rightarrow r = \frac{10}{3}.$$

783. A fentiek alapján kiszámíthatjuk a háromszög oldalait. Az alap $4\sqrt{2}$ cm, a szár pedig $6\sqrt{2}$ cm.

784. A gömb átmérője közelítőleg 46,4 mm (lásd **725.** feladat).

785. Használjuk fel a **725.** feladatban leírt hasonlóságot, a megadott $a = 4r$ összefüggést, és írjuk fel az AFC háromszögben a Pitagorasz-tételt!

$$\frac{\frac{r}{a}}{\frac{a}{2}} = \frac{m_a - r}{b} \Rightarrow m_a = \frac{r(a+2b)}{a} = \frac{a+2b}{4} \Rightarrow b^2 = \left(\frac{a+2b}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$5a^2 + 4ab - 12b^2 = 0 \Rightarrow 5\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 4\frac{a}{b} - 12 = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{6}{5}.$$



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

786. Írjuk fel a háromszög területét kétféleképpen!

$$T = \frac{ab}{2} = \frac{cm_c}{2} \Rightarrow m_c = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

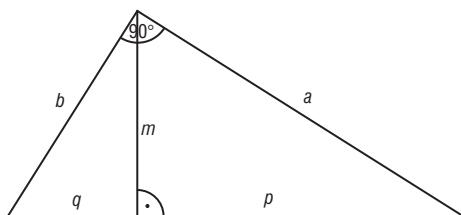
787. Legyen a két húr $AB = 11$ mm és $CD = 10$ mm, a húrok metszéspontja M !

A $CM : MD = 2 : 3$ arányból $CM = 4$ és $MD = 6$. Az AMD és BMC háromszögek hasonlóságából $AM = 8$ és $MB = 3$.

788. Legyen az AC és BE átlók metszéspontja M ! A szabályos ötszög egy belső szöge 108° . Az $ABE \sphericalangle$, $AEB \sphericalangle$, $BAC \sphericalangle$ ugyanakkora ívhez tartozó kerületi szögek, amelyek egyaránt 36° -osak. Az $AME \sphericalangle$ az ABM háromszög külső szöge, így 72° -os. Az AEM háromszög harmadik szögére 72° adódik, vagyis egyenlő szárú, $EM = AE$. Az ABM és ABE háromszögek hasonlóak, mert szögeik páronként egyenlők. Ebből $AB : BM = BE : AB$, de $AB = EM$, így $EM : MB = BE : AB$. Az átló nagyobbik szelete úgy aránylik a kisebbik szelethez, mint az átló a nagyobbik szelethez.

789. Az ábra szerinti jelöléseket használva írjuk fel a magasságtételt!

$m = \sqrt{p \cdot q}$ és $p + q = c$ alapján
 $p = 3$ és $q = 1$, amiből $a = 2\sqrt{3}$ cm
 és $b = 2$ cm. A háromszög hiányzó szögei 30° és 60° , mert a háromszög egy szabályos háromszög egyik felének tekinthető.



790. Használjuk a magasság- és a befogótételt a szokásos jelölésekkel!

$$m = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20} \text{ cm}; \quad a = \sqrt{9 \cdot 4} = 6 \text{ cm}; \quad b = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45} \text{ cm}.$$

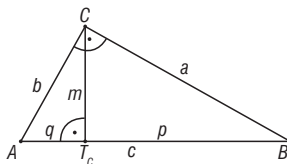
791. Legyen az adott befogó (a) átfogóra eső vetülete p ! Írjuk fel a Pitagorasz-tételt!

$$p = \sqrt{a^2 - m^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8, \quad m = \sqrt{p \cdot q}, \quad \text{amiből}$$

$$q = 4,5.$$

Az átfogó $c = p + q = 12,5$, a másik befogó

$$b = \sqrt{c \cdot q} = \sqrt{12,5 \cdot 4,5} = 7,5.$$



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

792. Legyen az adott befogó (a) átfogóra eső vetülete p , a másik befogóé pedig q ! Az átfogón adott szakasz a másik befogó merőleges vetülete. Írjuk fel a befogótételt az a oldalra!

$$a = \sqrt{c \cdot p} = \sqrt{(p+q) \cdot p}. \text{ Behelyettesítve } 15 = \sqrt{(p+16)p}. \text{ 0-ra redukálva}$$

$$p^2 + 16p - 225 = 0. \text{ Az egyenlet megoldásai } p_1 = -25; p_2 = 9.$$

Ebből csak a pozitív megoldás felel meg, azaz $p = 9$. Az átfogó $c = p + q = 25$ cm, a másik befogó $b = 20$ cm, a magasság $m = 12$ cm.

793. Használjuk az **791.** ábra jelöléseit, és írjuk fel a befogótételt!

$$a = \sqrt{c \cdot p} = \sqrt{(p+q)p} \Rightarrow 64 = (p+12)p \Rightarrow p = 4$$

Az átfogó 16, a másik befogó $8\sqrt{3}$, a magasság pedig $4\sqrt{3}$.

$$\mathbf{794.} \quad \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{c \cdot p}}{\sqrt{c \cdot q}} = \sqrt{\frac{p}{q}} \text{ alapján } p = 7,2 \text{ cm és } q = 12,8 \text{ cm.}$$

795. Az előző feladat alapján $b = 3\sqrt{14}$ cm, amiből $c = 9\sqrt{2}$ cm.

796. $12 = \sqrt{(p+q)p} = \sqrt{(2q+2)(q+2)} \Rightarrow q = 7$. Így az átfogó 16 cm, a másik befogó $4\sqrt{7}$ cm, a magasság pedig $3\sqrt{7}$ cm.

797. Az átfogóhoz tartozó magasság x és $116 - x$ hosszú szakaszokra bontja az átfogót. Alkalmazzuk a magasságtételt!

$$40 = \sqrt{x(116-x)} \Rightarrow x^2 - 116x + 1600 = 0 \Rightarrow x_1 = 100; x_2 = 16.$$

Az átfogó két szelete így 16 cm és 100 cm.

A két befogó a befogótételből: $a = \sqrt{100 \cdot 116} \approx 107,7$ cm, $b = \sqrt{16 \cdot 116} \approx 43,1$ cm.

798. Legyen $CD \perp CA$, és CF az AB alaphoz tartozó magasság! $CF = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$.

Az ACD derékszögű háromszögnek CF az átfogóhoz tartozó magassága. Alkalmazzuk erre a magasságtételt! $CF = \sqrt{AF \cdot FD} \Rightarrow 12 = \sqrt{16(16-BD)}$, amiből

$$BD = 7. \text{ Ezzel } AD = 32 - 7 = 25 \text{ és } CD = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15.$$

799. A deltoid szimmetriaátlója két derékszögű háromszögre bontja a négyszöget. Írjuk fel erre a háromszögre a magasság-, majd a befogótételt! A deltoid oldalaira $\sqrt{26}$ és $5\sqrt{26}$ adódik.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

800. A deltoidot két derékszögű háromszögre bontja a szimmetriaátlója ($\Leftarrow$ Thalész-tétel megfordítása), így az előző feladathoz hasonlóan:

$$\sqrt{208} = 4\sqrt{13} \text{ mm és } \sqrt{468} = 6\sqrt{13} \text{ mm a két oldal hossza.}$$

801. A park közelítőleg 50,96 m hosszú és 14,56 m széles.

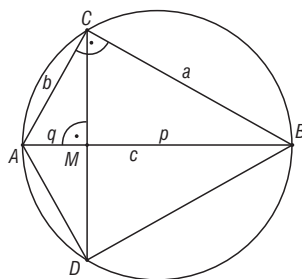
802. $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3}b$ és $b = c - 4$ alapján $b = 4$, $c = 8$ és $a = 4\sqrt{3}$. Mivel az átfogó kétszerese a kisebbik befogónak, a háromszög hegyesszögei 30° és 60° .

803. a) Az $ACBD$ négyszög a Thalész-tétel alapján egy derékszögű deltoid. Az előző feladathoz hasonlóan adódik, hogy $r = 19,5$ cm (az AB fele).

b) $AC \approx 32,45$ cm és $BC \approx 21,63$ cm.

c) A két háromszög hasonló mert két-két szöge egyenlő (derékszög, illetve azonos ívhez tartozó kerületi szögek). A hasonlóság aránya

$$\lambda = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c \cdot q}}{\sqrt{c \cdot p}} = \sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{\frac{12}{27}} = \frac{2}{3}.$$



804. Használjuk fel a szögfelezőtételt és a befogótételt, majd a magasságtételt!

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{4,5} = \frac{4}{3}, \text{ illetve } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{c \cdot p}}{\sqrt{c \cdot q}} = \sqrt{\frac{p}{q}} \Rightarrow \frac{p}{q} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$

a) Mivel $c = p + q = 10,5$, ezért a magasság az átfogót $p = \frac{16}{25} \cdot 10,5 = 6,72$ és $q = c - p = 3,78$ részekre bontja.

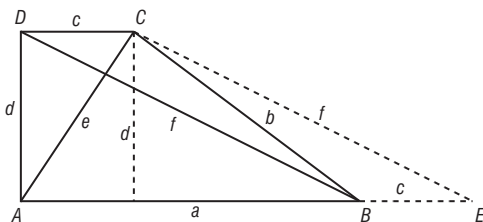
b) A magasság $m = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{6,72 \cdot 3,78} = 5,04$ egység hosszú.

805. Használjuk az ábra jelöléseit, ahol $CE \parallel BD$!

– Ha $e \perp f$, akkor az AEC háromszög derékszögű, így felírható benne a magasságtétel

$$d = \sqrt{a \cdot c}.$$

– Ha $d = \sqrt{a \cdot c}$, akkor $e^2 = d^2 + c^2 = ac + c^2$, és $f^2 = d^2 + a^2 = ac + a^2$ alapján $e^2 + f^2 = a^2 + 2ac + c^2 = (a + c)^2$, azaz az AEC háromszög derékszögű, amiből $e \perp f$.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

806. Alkalmazzuk a körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tételét!

a) $PE = \sqrt{PA \cdot PB} = \sqrt{6 \cdot 24} = 12 \text{ cm};$

b) $PO = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$, ebből $PD = 20 - 16 = 4 \text{ cm}.$

807. A **801.** a) alapján az AB húr $12 \text{ cm}.$

808. Az előzőek szerint a szelő körbe eső szakasza 9 , az érintőszakasz $6 \text{ cm}.$

809. A kör sugara 15 egység.

810. A szelő rövidebb szelete 18 cm , az érintőszakasz $24 \text{ cm}.$

7.11. Vektorok

811. a) hamis; b) igaz; c) hamis; d) hamis; e) hamis; f) igaz; g) igaz.

812. Használjuk fel, hogy a szabályos hatszög szemközti oldalai párhuzamosak, és a szimmetriaátló kétszerese az oldalnak!

a) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DK} = \vec{a};$

b) $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC} = -\vec{a};$

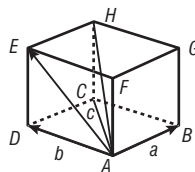
c) pl. $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{FE};$

d) pl. $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{KF}.$

813. Végezzük el a szerkesztéseket a definíciók alapján!

814. Legyen $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ és $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$!

Ezekkel $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AH} = \vec{b} + \vec{c}$
és $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$



815. Végezzük el a szerkesztéseket a definíciók alapján!

816. Az összegvektor és a különbségvektor egy rombusz két átlóvektora, így

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3} \text{ és } |\vec{a} - \vec{b}| = 1.$$

817. Hasonlóan az előző feladat megoldásához!

818. Az oldalvektorok $\vec{a} + \vec{b}$ és $\vec{a} - \vec{b}$, vagy ezek ellentettjei, az irányítástól függően.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

$$819. \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}; \quad \overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}; \quad \overrightarrow{DH} = \frac{2}{3}\vec{a}; \quad \overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}\vec{b}; \quad \overrightarrow{AF} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}; \quad \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b};$$

$$\overrightarrow{FD} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}; \quad \overrightarrow{HF} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}; \quad \overrightarrow{BH} = \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}.$$

$$820. \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}; \quad \overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}; \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}; \quad \overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}; \quad \overrightarrow{FS} = -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b};$$

$$\overrightarrow{SC} = \frac{2}{3}\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}; \quad \overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}.$$

$$821. \text{ a) } \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}; \quad \text{ b) } \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}; \quad \text{ c) } \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}; \quad \text{ d) } \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5}; \quad \text{ e) } \frac{q\vec{a} + p\vec{b}}{q + p}.$$

$$822. \overrightarrow{DK} = \vec{b}; \quad \overrightarrow{AD} = -\vec{a} - \vec{b}; \quad \overrightarrow{BF} = -\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}; \quad \overrightarrow{DG} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{3};$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = (-\vec{a} - \vec{b}) + \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{5}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b};$$

$$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b};$$

$$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}.$$

$$823. \text{ A 822. feladat alapján } \overrightarrow{EF} = \frac{\vec{a} - \vec{c}}{2}, \text{ ahol } \vec{a} \text{ és } \vec{c} \text{ a két alap oldalvektora.}$$

824. Szerkessze meg a $\vec{v}$ két végpontján átmenő, $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal párhuzamos egyeneseket! A kapott paralelogramma $\vec{v}$ vektorral közös kezdőpontú oldalvektorainak összege $\vec{v}$.

825. Alkalmazzuk az előbbi szerkesztést! A két komponens nagysága 30 N és $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 60 \approx 52 \text{ N}$.

826. a) $\vec{b} = -\vec{c}$ és $\vec{a}$ tetszőleges;
 b) egy szabályos háromszög három oldalvektora a megfelelő irányítással;
 c) egy szabályos háromszög súlypontjából a csúcsokba mutató vektorok.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

827. Végezzük el a vektorműveleteket, majd adjuk meg a kapott vektor koordinátáit!

a) $\vec{a} + \vec{b} (5; -2), \quad \vec{b} - \vec{a} (-1; -6);$

b) $3\vec{a} (9; 6), \quad \frac{3}{2}\vec{b} (3; -6), \quad -2\vec{b} (-4; 8);$

c) $2\vec{a} + \vec{b} (8; 0), \quad -2\vec{a} - \vec{b} (-8; 0), \quad \frac{\vec{b} - 2\vec{a}}{2} (-2; -4).$

828. A helyvektorok végpontjai

a) $(1; 0), (0; 5), (-6; 0);$

b) $(1; 1), (3; 4), (-5; 6);$

c) $(7; -2), (-1; -4), (1; -3);$

Az $x\vec{i} + y\vec{j}$ helyvektor az $(x; y)$ koordinátájú pontba mutat.

7.12. Trigonometria

829. a) Vegyünk fel egy olyan derékszögű háromszöget, melynek hegyesszögei 30° és 60° , és az átfogója 2 egységnyi! Ennek rövidebb befogója 1, a másik befogója $\sqrt{3}$ egység. Ebből a definíciók alapján:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

b) Vegyünk egy egységnyi befogójú, egyenlő szárú, derékszögű háromszöget, amelynek hegyesszögei 45° -osak, az átfogója pedig $\sqrt{2}$!

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

c) Az a)-beli háromszögben húzzuk be a 30° -os szög szögfelezőjét! Ez a szemközti oldalt a befogók arányában osztja. Keletkezett egy olyan derékszögű háromszög, amelynek egyik szöge 15° -os, a mellette fekvő befogó $\sqrt{3}$, a vele szemközti befogó $2\sqrt{3} - 3$ és az átfogója $2\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$. Ebből a háromszögből a keresett szögfüggvényértékek:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}, \quad \operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}.$$

d) Az előző gondolatmenet szerint a b)-beli háromszög szögfelezőjének behúzásával keletkezett derékszögű háromszögből:

$$\sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, \quad \cos 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \quad \operatorname{tg} 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1.$$



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

830. Az átfogó hossza $c = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$. A legkisebb szög a legrövidebb oldalal szemkölti szög, legyen ez α !

$$\sin \alpha = \frac{6}{3\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

831. Mivel $a = 3c$, ezért $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Ebből $\alpha \approx 19,5^\circ$ és $\beta \approx 70,5^\circ$.

832. A hiányzó oldalak hossza 18 és 19,5.

833. Használjuk fel a szögfüggvények definícióját!

a) $a:c = 2:5, \quad b:c = \sqrt{21}:5, \quad a:b = 2:\sqrt{21};$

$a:c = 1:4, \quad b:c = \sqrt{15}:4, \quad a:b = 1:\sqrt{15};$

nincs ilyen háromszög, mert $\sin \alpha$ nem lehet 1-nél nagyobb.

b) $b:c = 7:8, \quad a:c = \sqrt{15}:8, \quad a:b = \sqrt{15}:7;$

$b:c = 1:10, \quad a:c = \sqrt{99}:10, \quad a:b = \sqrt{99}:1;$

nincs ilyen háromszög, mert $\cos \alpha$ nem lehet 1.

c) $a:b = 8:5, \quad a:c = 8:\sqrt{89}, \quad b:c = 5:\sqrt{89};$

$a:b = 1, \quad a:c = b:c = 1:\sqrt{2};$

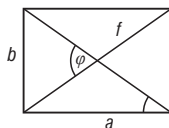
$a:b = 6:25, \quad a:c = 6:\sqrt{661}, \quad b:c = 25:\sqrt{661}.$

834. Az emelkedő $1500 \cdot \sin 5^\circ \approx 130,7$ m magasra visz.

835. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2,5} = 0,4 \Rightarrow \alpha \approx 21,8^\circ.$

836. $a = 7,5 \cdot \cos 20^\circ \approx 7,05, \quad b = 7,5 \cdot \sin 20^\circ \approx 2,57.$

837. $a = f \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \approx 10,1$ cm és $b = f \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \approx 8,96$ cm.



838. $a \approx 29,1$ cm és $b \approx 19,4$ cm.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

839. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, és felezik a rombusz szögeit.

$$\sin 26^\circ = \frac{e}{7,5} = \frac{e}{15} \quad \text{és} \quad \cos 26^\circ = \frac{f}{7,5} = \frac{f}{15}, \quad \text{amiből } e \approx 6,58 \text{ cm és } f \approx 13,48 \text{ cm.}$$

840. Használjuk fel, hogy a rombusz magassága egyenlő a beírt kör sugarának kétszeresével!

$$\sin \alpha = \frac{m}{a} = \frac{2r}{a} = \frac{16}{19}, \quad \text{amiből a rombusz szögei közelítőleg: } 57,36^\circ \text{ és } 122,64^\circ.$$

$$\mathbf{841.} \quad a = \frac{10}{\cos 25^\circ} \approx 11,03 \text{ cm} \quad \text{és} \quad e = 20 \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \approx 9,33 \text{ cm.}$$

$$\mathbf{842.} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{e}{f} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 21,8^\circ \Rightarrow \alpha \approx 43,6^\circ \quad \text{és} \quad \beta \approx 136,4^\circ.$$

$$\mathbf{843.} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\frac{f}{2}} = \frac{2r}{f} = \frac{2r}{4r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ \text{ és } \beta = 120^\circ.$$

844. A másik oldal $20 \cdot \operatorname{tg} 26,75^\circ \approx 10,08$, az átlók pedig közelítőleg 22,4 és 18 cm hosszúak.

845. Két eset van attól függően, hogy melyik az alap hossza.

Ha $a = 3,6$ cm, akkor az alapon fekvő szög közelítőleg $73,67^\circ$, a szárszög $32,66^\circ$.

Ha $a = 6,4$ cm, akkor az alapon fekvő szög közelítőleg $27,27^\circ$, a szárszög $125,46^\circ$.

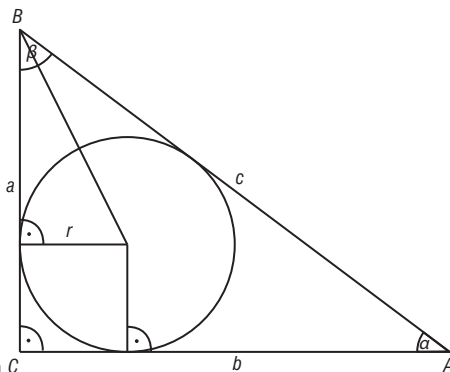
$$\mathbf{846.} \quad h = 2r \cdot \sin 75^\circ \approx 73,41 \text{ mm.}$$

$$\mathbf{847.} \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r}{a-r} = \frac{3}{14} \Rightarrow \frac{\beta}{2} \approx 12,1^\circ \Rightarrow \beta \approx 24,2^\circ \text{ és } \alpha \approx 65,8^\circ$$

$$b = 17 \cdot \operatorname{tg} 24,2^\circ \approx 7,64 \text{ cm,}$$

$$c = \frac{17}{\sin 65,8^\circ} \approx 18,64 \text{ cm és}$$

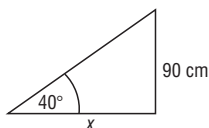
$$R = \frac{c}{2} = 9,32 \text{ cm.}$$



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

848. A két szint távolsága $12 \cdot 25 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \approx 357,5$ cm.

849. $T_x = \frac{90}{\operatorname{tg} 40^\circ} \approx 107,26$ cm-re.



850. A villanyoszlop a háztól $d = 1,6 \cdot \operatorname{tg} 78^\circ \approx 7,53$ m-re van.

851. A megtett út $s = \frac{2}{60} h \cdot 600 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20$ km. Az emelkedés szöge $\sin \alpha = \frac{2,4}{20}$ alapján $\alpha \approx 6,9^\circ$.

852. Jelöljük a két szélső helyzet távolságát d -vel, a kötél hosszát l -lel!

$$\text{a) } \sin 20^\circ = \frac{\frac{d}{2}}{l} = \frac{d}{2l} \Rightarrow d = 160 \cdot \sin 20^\circ \approx 54,72 \text{ cm.}$$

b) A legelső ponthoz képest $80 - 80 \cdot \cos 20^\circ \approx 4,82$ cm-t emelkedik.

853. Legyen a lábak hajlásszöge α !

$$\text{a) } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{0,7}{2} \Rightarrow \alpha \approx 41^\circ;$$

b) A létra magassága a szétnyitás után $3,2 \cdot \cos 12,5^\circ \approx 3,12$ m.

854. Legyen a létra magassága kinyitva h ! $h = 2 \cos 20^\circ = 1,88$. Az ember magasságát hozzáadva 3,68 m-t kapunk, ami nagyobb, mint a szoba belmagassága, tehát nem tud felállni.

855. Az eredő erő a 120 N nagyságú erővel közelítőleg $54,46^\circ$ -os, a 168 N nagyságúval közelítőleg $35,54^\circ$ -os szöget zár be.

856. A hegy magassága $4000 \cdot \sin 32^\circ \approx 2119,7$ m, a keleti lejtő közelítőleg $20,7^\circ$ -os.

857. Legyen az épület magassága h , a kezdeti távolsága d !

$$\operatorname{tg} 18,6^\circ = \frac{h-1,56}{d} \text{ és } \operatorname{tg} 16^\circ \approx \frac{h-1,56}{d+18}, \text{ amiből } h \approx 36,45 \text{ m.}$$



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

858. Legyen a két ház távolsága d , a szemközti ház magassága h !

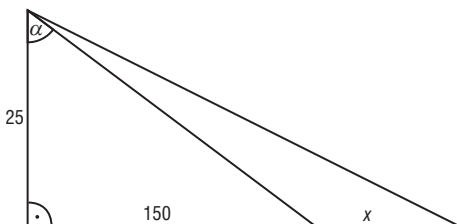
$$\operatorname{tg} 8,2^\circ = \frac{6}{d} \Rightarrow d \approx 41,64 \quad h - 6 = 41,64 \cdot \operatorname{tg} 26,8^\circ \Rightarrow h \approx 27,03 \text{ m.}$$

859. Az ábra szerint:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{150}{25} = 6 \Rightarrow \alpha \approx 80,54^\circ,$$

$$\operatorname{tg}(80,54^\circ + 1,9^\circ) =$$

$$= \frac{150 + x}{25} \Rightarrow x \approx 38,3 \text{ m}$$



860. Az ábra szerint:

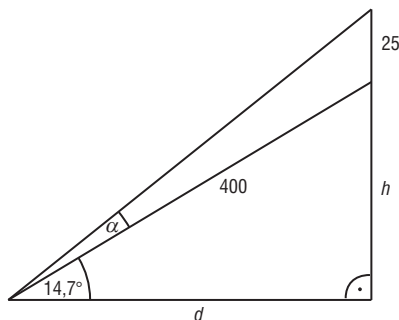
$$h = 400 \cdot \sin 14,7^\circ \approx 101,5 \text{ m magasra visz}$$

$$\text{a lejtő } (d = 400 \cdot \cos 14,7^\circ \approx 386,9).$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 14,7^\circ) = \frac{101,5 + 25}{386,9}$$

$$\alpha + 14,7^\circ \approx 18,1^\circ$$

$$\alpha \approx 3,4^\circ$$



861. Jelöljük az ablak talajszint feletti magasságát h -val, a depressziószöveget pedig α -val!

$$\operatorname{tg} 21,8^\circ = \frac{30 - h}{20} \Rightarrow h \approx 22 \text{ m és } \operatorname{tg} \alpha = \frac{22}{20} \Rightarrow \alpha \approx 47,7^\circ.$$

862. A rövidebb kötel hossza $\frac{3,6}{\sin 53,15^\circ} \approx 4,5 \text{ m}$. A hosszabb, 6 m-es kötel ($\sin \beta = \frac{3,6}{6}$ alapján) $\beta \approx 36,87^\circ$ -os szöget zár be a talajjal.

863. Legyen a két csiga távolsága d ! Ekkor $\operatorname{tg} 21,8^\circ = \frac{12}{\frac{d}{3}} = \frac{36}{d}$, amiből $d \approx 90 \text{ cm}$.

A távolabbi csiga ($\operatorname{tg} \beta = \frac{12}{60}$ alapján) $\beta \approx 11,31^\circ$ -os emelkedési szögben látja a fűszálat.

864. A **860.** feladat alapján: a domb közelítőleg $20,8^\circ$ -os meredekségű és közelítőleg $15,89 \text{ m}$ magas a kilátó.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

865. A távolság $d = \frac{20-1,5}{\operatorname{tg} 29,1^\circ} \approx 33,24$ m. Kétszer ekkora távolságból közelítőleg $15,55^\circ$ -os emelkedési szögben látjuk az épület tetejét.

866. Legyen a vitorlázógép távolsága a kifutópálya végétől légvonalban mérve d , ennek a talajra eső vetülete b !

a) $d = \frac{240}{\sin 8^\circ} \approx 1724,5$ m;

b) $b = \frac{240}{\operatorname{tg} 8^\circ} \approx 1707,7$ m, amiből $\operatorname{tg} \beta = \frac{240}{1707,5 + 750} \Rightarrow \beta \approx 5,58^\circ$ a korábbi depressziószög.

867. Használjuk fel, hogy az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra!

Az érintőszakasz hossza $e = \frac{5}{\operatorname{tg} 29^\circ} \approx 9,02$ cm.

A húr hossza $h = 2 \cdot 5 \cdot \sin 61^\circ \approx 8,75$ cm.

868. A háromszög területéből és a szár hosszából a szárhoz tartozó magasság: $m_b = \frac{2T}{b} = 20$ cm. Két ilyen háromszög van, egy hegyes- és egy tompaszögű. Legyen a szárszög β , az alapon fekvő szög α , az alap hossza a !

Hegyesszögű háromszög esetén: $\sin \beta = \frac{m_b}{b} = \frac{20}{25}$, ebből $\beta \approx 53,13^\circ$ és $\alpha \approx 63,43^\circ$, valamint $a = 50 \cdot \cos 63,43^\circ \approx 22,36$ cm.

Tompaszögű háromszög esetén: $\sin(180^\circ - \beta) = \frac{m_b}{b}$, amiből $\beta \approx 126,87^\circ$ és $\alpha \approx 26,57^\circ$, valamint $a \approx 44,72$ cm.

869. Húzzuk be a trapéz magasságát a rövidebb alap két végpontjából, amivel két derékszögű háromszög keletkezik!

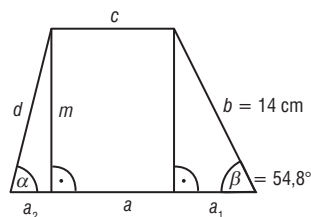
$m = 14 \cdot \sin 54,8^\circ \approx 11,44$ cm,

$a_1 = 14 \cdot \cos 54,8^\circ \approx 8,07$ cm,

$a_2 = a - (a_1 + c) = 9,93$ cm

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{a_2} = \frac{11,44}{9,93}$, ebből $\alpha \approx 49,04^\circ$, továbbá $\delta = 130,96^\circ$ és $\gamma = 125,2^\circ$.

b) A másik szár $d = \frac{m}{\sin \alpha} = \frac{11,44}{\sin 49,04^\circ} \approx 15,15$ cm.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

870. Az alap hossza $\cos 75^\circ = \frac{a-c}{b} = \frac{a-12}{16}$ alapján $a \approx 16,14$ cm.

871. A hosszabbik szár $b = \frac{6}{\sin 48^\circ} \approx 8,07$ cm, az alap $a = \frac{6}{\operatorname{tg} 48^\circ} + 15 \approx 20,4$ cm.

872. A 869. feladat alapján: a 24 cm-es szár közelítőleg $40,07^\circ$ -os szöget zár be a 45 cm-es alappal, és a rövidebb alap 22,5 cm hosszú.

873. Kb. 47,5 cm mély és 111 cm széles az árok.

874. Rajzoljuk be a szabályos sokszög egy középponti háromszögét! Ez a háromszög egyenlő szárú, amelynek alapja a sokszög oldala (a), a hozzá tartozó magasság a beírt kör sugara (r), szára a köré írt kör sugara (R), és szárszöge $\omega = \frac{360^\circ}{n}$ (ahol n a sokszög oldalainak száma). Ezek alapján: $\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a}{2r}$, ebből $a = 8 \cdot \sin 22,5^\circ \approx 3,06$, amiből $K = 8 \cdot a = 24,48$ cm. A beírt kör sugara $r = R \cdot \cos 22,5^\circ \approx 3,70$, amiből $T = 8 \cdot \frac{a \cdot r}{2} \approx 4 \cdot 3,06 \cdot 3,70 \approx 45,29$ cm².

875. $r = 24 \cdot \cos 36^\circ \approx 19,42$ cm.

876. $r = 9$ cm, amiből...

a) $a = 18 \cdot \operatorname{tg} 18^\circ \approx 5,85$ cm;

b) $R = \frac{r}{\cos 18^\circ} = \frac{9}{\cos 18^\circ} \approx 9,46$ cm.

877. a) $a = \frac{K}{12} = 9$ cm és $r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{9}{2 \operatorname{tg} 15^\circ} \approx 16,8$ cm, ezzel $T = 12 \cdot \frac{a \cdot r}{2} \approx 907,2$ cm².

b) A leghosszabb átló: $2R = \frac{a}{\sin 15^\circ} \approx 34,77$ cm.

A legrövidebb átló: $e = 18 \cdot \sin 75^\circ \approx 17,39$ cm.



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

878. Az ábra szerint $OO' = 45$ cm,

$$r = 10 \text{ cm}, \quad r' = 5 \text{ cm}.$$

$$EE' = e = \sqrt{45^2 - 5^2} = \sqrt{2000} \approx 44,72$$

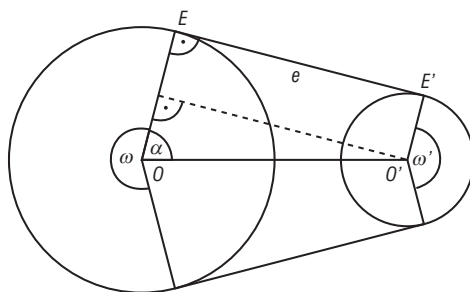
$$\text{és } \cos \alpha = \frac{5}{45} \Rightarrow \alpha \approx 83,62^\circ.$$

Így a két körcikk középponti szöge

$$\omega \approx 192,76^\circ \text{ és } \omega' \approx 167,24^\circ, \text{ az ív-}$$

$$\text{hosszak pedig } i = \frac{10\pi \cdot 192,76^\circ}{180^\circ} \approx 33,6$$

$$\text{és } i' = \frac{5\pi \cdot 167,24^\circ}{180^\circ} \approx 14,6. \text{ Ezekkel a lánc hossza } K = i + i' + e \approx 93 \text{ cm}.$$



879. A kis körök középpontjai egy szabályos kilencszög csúcsai, amelynek oldala 6 mm.

A **874.** feladat alapján a köré írható kör sugara közelítőleg 8,77 mm. Ezzel a csapágy belső sugara 5,77 mm, a külső sugara pedig 11,77 mm.

880. $T \approx 1179,55 \text{ mm}^2$.

881. Határozzuk meg előbb a húr által lemetszett kisebbik körszelet területét! Legyen ez

$$T_1, \text{ a középponti szöge } \omega = 2\alpha! \quad \sin \alpha = \frac{h}{2r} = \frac{16}{20} \Rightarrow \alpha \approx 53,13^\circ.$$

$$T_1 = T_{\text{körcikk}} - T_\Delta = \frac{10^2 \pi \cdot 106,26^\circ}{360^\circ} - \frac{10^2 \cdot \sin 106,26^\circ}{2} \approx 44,73 \text{ cm}^2. \text{ A másik körszelet}$$

$$\text{területe } T_2 = T_\circ - T_1 = 100\pi - 44,73 \approx 269,32 \text{ cm}^2.$$

882. Az öntözött terület a két kör területösszegének és a közös rész területének a különbsége. A közös részt a közös húr két egybevágó körszeletre bontja. Az előző feladat alapján az öntözött terület nagysága $201,33 \text{ m}^2$.

883. Jelöljük a körök középpontját A , B és C -vel! A középpontok távolsága így $AC = 5$, $BC = 12$ és $AB = 13$ egység. Mivel $5^2 + 12^2 = 13^2$, így az ABC háromszögnek a C csúcsnál derékszöge van. A körök által közrezárt síkidom területét úgy kapjuk, hogy az ABC háromszög területéből kivonjuk a 3 körcikk területét. Az ABC háromszög szögei $\sin \alpha = \frac{5}{12}$ alapján $\alpha \approx 22,62^\circ$ és $\beta \approx 67,38^\circ$.

$$T = \frac{5 \cdot 12}{2} - \left(\frac{2^2 \pi}{4} + \frac{3^2 \pi \cdot 67,38^\circ}{360^\circ} + \frac{10^2 \pi \cdot 22,62^\circ}{360^\circ} \right) \approx 1,84 \text{ egységnégyzet}.$$



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

884. A kutya által bejárható terület alakja függ a kötéł hosszától.

a) 6 m hosszú kötéł esetén egy kör $\frac{3}{4}$ részét. Ennek területe

$$T_1 = \frac{3}{4} \cdot 6^2 \pi = 27\pi \approx 84,8 \text{ m}^2.$$

b) 10 m-es kötéł esetén egy 10 m sugarú kör $\frac{3}{4}$ részét és két, 2 m sugarú negyed

kört. Ennek területe $T_2 = \frac{3}{4} \cdot 10^2 \pi + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2^2 \pi = 77\pi \approx 241,9 \text{ m}^2$;

c) 14 m-es kötéł esetén a 14 m sugarú háromnegyed kör egy része a telken kívül esik, így a körszelet területét le kell vonni. A körszelet területéhez meg kell határo-

zni a középponti szöget, ami $\cos \alpha = \frac{11}{14}$ alapján $2\alpha \approx 76,42^\circ$.

$$\text{A körszelet területe } T_{\text{körszelet}} = \frac{14^2 \pi \cdot 76,42^\circ}{360^\circ} - \frac{14^2 \cdot \sin 76,42^\circ}{2} \approx 35,38 \text{ m}^2.$$

$$\text{A bejárható terület } T_3 = \frac{3}{4} \cdot 14^2 \pi + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 6^2 \pi - 35,38 \approx 482,7 \text{ m}^2.$$

885. a) 1; b) 1; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $-\frac{1}{2}$; f) $5 - 2\sqrt{6}$; g) 4.

886. Használjuk fel a szögfüggvények közti összefüggéseket!

a) $\cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha$;

b) $\frac{1}{\cos \alpha}$;

c) $1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$;

d) $\frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \cos^2 \alpha$;

e) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = 1$;

f) $\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \frac{2}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} =$
 $= 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 1.$



7. GEOMETRIA – MEGOLDÁSOK

887. Használjuk fel a szögfüggvények közti összefüggéseket!

$$\text{a) } \sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{3}{5} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3};$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{3} \text{ esetén } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\sin \alpha = 0,15 = \frac{3}{20} \text{ esetén } \cos \alpha = \frac{\sqrt{391}}{20} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{\sqrt{391}};$$

nincs ilyen szög, mert $\frac{\sqrt{10}}{3} > 1$;

$$\text{b) } \cos \alpha = \frac{12}{13} \text{ esetén } \sin \alpha = \frac{5}{13} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12};$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{4} \text{ esetén } \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15};$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ esetén } \sin \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\cos \alpha = 0,7 = \frac{7}{10} \text{ esetén } \sin \alpha = \frac{\sqrt{51}}{10} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{51}}{7};$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} \alpha = 1 \text{ esetén } \sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24} \text{ esetén } \cos \alpha = \frac{24}{25} \quad \text{és} \quad \sin \alpha = \frac{7}{25};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{4} \text{ esetén } \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{97}} \quad \text{és} \quad \sin \alpha = \frac{9}{\sqrt{97}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 5 \text{ esetén } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}} \quad \text{és} \quad \sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}.$$

$$\mathbf{888.} \quad T = \frac{e \cdot f \cdot \sin \varphi}{2} = \frac{24 \cdot 19 \sin 53^\circ}{2} \approx 182,1 \text{ cm}^2.$$



8. Gondolkodási módszerek – megoldások

8.1. Skatulyaelv, logika

889. A legrosszabb esetben minden hónapban csak 2 diáknak van születésnapja. Egy újabb diákot hozzávéve már biztosan lesz egy olyan hónap, amelybe 3 születésnap esik. Így legalább 25-en járnak az osztályba.

890. a) 10; b) $8 \cdot 9 + 1 = 73$;

c) 73 darab joghurt esetén biztosan van 10 db egyforma tárgy, és a többi 7-féléből is van 9-9 db egyforma. Ha legrosszabb esetben innentől csak egyféle tárgyat ábrázoló joghurt kapható, akkor minimum 10 db-ot kell vásárolni egy újabb ajándék tárgyért és megint 10 db-ot a 3. ajándék tárgyért. $73 + 10 + 10 = 93$;

d) Nem lehet biztos számot megadni. Elképzelhető olyan eset is, hogy bármennyit is vásárolnak, az ajándékok között soha nem lesz 3 különböző.

891. Használjuk a skatulyaelvet! Számoljuk össze a még kedvezőtlen esetek számát, majd adjunk hozzá egyet!

- a) $3 + 1 = 4$; b) $15 + 20 + 1 + 1 = 37$;
c) $15 + 20 + 1 = 36$; d) $10 + 20 + 2 + 1 = 33$;
e) $10 + 2 + 2 + 1 = 15$.

892. Az előzőhöz hasonlóan: $8 \cdot 2 + 6 + 1 = 23$.

893. A számok összege -5 ; -3 ; -1 ; 1 ; 3 vagy 5 lehet csak. Mivel 5 sor és 5 oszlop van, összesen 10 db összeget kapunk. Az összegre azonban csak 6 különböző lehetőség van, így lesz legalább két egyenlő összeg, vagyis a táblázat nem tölthető ki a megadott módon.

894. Az egész számok tízféle számjegyre végződhetnek, ezért a 11 szám között biztosan lesz kettő, melyek azonos számjegyre végződnek. E két szám különbsége 0-ra fog végződni, így osztható lesz 10-zel.

895. A számok között van két szomszédos, hiszen $2 \cdot 500 = 1000$. Szomszédos egész számoknak viszont nem lehet 1-nél nagyobb közös osztója, hiszen az osztója lenne a két szám különbségének is, ami 1.



8. GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK – MEGOLDÁSOK

- 896.** Tegyük fel, hogy a társaság n főből áll. A lehetséges ismeretségi számok az egyes embereknél: $0, 1, 2, \dots, n-1$. Mivel az ismeretség kölcsönös, ezért a 0 és $n-1$ egyszerre nem fordulhat elő, hiszen nem lehet két olyan ember ugyanabban a társaságban, akik közül az egyik mindenkit ismer, a másik pedig senkit sem. Ez azt jelenti, hogy legfeljebb $n-1$ különböző ismeretségi szám fordulhat elő az n számú ember között, így biztosan lesz két olyan ember, akinek azonos számú ismerőse van.
- 897.** Osszuk fel az intervallumot 3 egybevágó, $\frac{1}{3}$ hosszú részre! A kijelölt számok között biztosan lesz kettő, amely azonos részre esik, ezek különbségének abszolút értéke legfeljebb $\frac{1}{3}$.
- 898.** Osszuk fel a téglalapot az oldalaival párhuzamos egyenesek segítségével 25 darab egybevágó, 3, illetve 4 cm-es oldalakkal bíró téglalapokra! A 26 kijelölt pont között biztosan lesz legalább két olyan, melyek azonos kis téglalapra esnek. A Pitagorasz-tétel miatt egy ilyen kis téglalap átlójának hossza $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm. Ennél nagyobb távolság a téglalap két pontja között nem lehet, így a rajta lévő két kijelölt pont távolsága sem lehet több ennél.
- 899.** Osszuk fel a téglatestet gondolatban a határoló lapjaival párhuzamos síkok segítségével 27 darab egybevágó, 2 m, 3 m és 6 m éllel rendelkező kisebb téglatestre! A 28 szűnyög között biztosan lesz legalább két olyan, melyek azonos kis téglatestbe vagy a határára esnek. A téglatest testátlójára vonatkozó képlet miatt egy ilyen kis téglatest testátlójának hossza: $\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$ m. Ennél nagyobb távolság a téglatest két pontja között nem lehet, így a két szűnyög távolsága sem lehet nagyobb ennél.
- 900.** A páros számok négyzete 4-gyel osztva nyilván 0 maradékot ad. A páratlan számok négyzete: $(2k+1)^2 = 4(k^2+k)+1$ miatt 4-gyel osztva 1 maradékot ad. A négyzet-számok 4-es maradéka tehát kétféle lehet. Ez azt jelenti, hogy három négyzetszám között mindig van kettő, amelynek egyenlő a 4-es maradéka, ezért különbségük osztható lesz 4-gyel.
- 901.** A páros számok négyzete: $(2k)^2 = 4k^2$, ami 8-cal osztva 0, vagy 4 maradékot ad. A páratlan számok négyzete $(2k+1)^2 = 4(k^2+k)+1 = 4k(k+1)+1$ miatt 8-cal osztva 1 maradékot ad, hiszen k vagy $k+1$ páros. A négyzetszámok 8-as maradéka háromféle lehet. Ez azt jelenti, hogy négy négyzetszám között mindig van kettő, amelynek egyenlő a 8-as maradéka, így különbségük osztható lesz 8-cal.



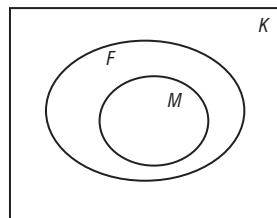
8. GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK – MEGOLDÁSOK

- 902.** Tekintsük az $5, 55, 555, \dots, 55\dots5$ számokat, ahol az utolsó szám 2010 darab 5-ös számjegyből áll. Mivel a 2009-cel való osztási maradékok száma 2009, ezért 2010 darab szám között lesz két olyan, amely azonos maradékot ad 2009-cel osztva. A felírt számok között tekintve e két számot, majd a nagyobbikból kivonva a kisebbiket, a kapott szám $55\dots50\dots0 = 55\dots5 \cdot 10^k = A \cdot 10^k$ alakú, ahol k pozitív egész, továbbá a szám osztható 2009-cel. Mivel a 10 és a 2009 relatív prímek, ezért A -nak 2009-cel osztható számnak kell lenni. Ezzel a feladat állítását beláttuk.
- 903.** A feladat megoldása azon az egyszerű tényen alapszik, miszerint ha adott k db skatulya, és azokba n db tárgyat helyezünk el, és $n > k \cdot m$ (m természetes szám), akkor legalább egy skatulyába legalább $m + 1$ tárgy kerül.
A hibás válaszok száma 0, 1, ..., 31, tehát 32-féle lehet. Mivel $32 \cdot 58 < 1800$, így lennie kell 59 darab azonos eredménynek.
- 904.** Osszuk fel a négyzetet 9 db egybevágó 10×10 -es négyzetre! Mivel 10 db pont van, lesz legalább egy olyan 10×10 -es négyzet, amelybe 2 pont kerül. Ennek a két pontnak a távolsága nem lehet nagyobb a négyzet átlójánál. Ez $10\sqrt{2}$, ami kisebb mint 15.
- 905.** Az előzőhöz hasonlóan osszuk fel a négyzetet 25 db egybevágó 7×7 -es négyzetre! Lesz legalább egy olyan 7×7 -es négyzet, amelybe 3 pont kerül. Ebben a négyzetben a legnagyobb távolság az átló hossza. Ez $7\sqrt{2} < 10$, azaz a négyzet lefedhető egy 5 cm sugarú körlappal.
- 906.** Osszuk fel a körlapot 6 db 60° -os középponti szögű egybevágó körcikkre! Így lesz legalább egy olyan körcikk, amelyikbe 3 találati pont került. Ebben a körcikkben a legnagyobb távolság 1 egység, így ezeknek a pontoknak a páronként vett távolsága legfeljebb 1.
- 907.** Az a) és b) állítás igaz, a többi hamis. Az állítások egy lehetséges tagadása:
- a) A nulla nem természetes szám.
 - b) Van olyan egész szám, ami nem racionális.
 - c) Nincs tompaszögű szabályos háromszög.
 - d) Van olyan deltoid, amelyik nem paralelogramma.
 - e) Van olyan háromszög, ami forgásszimmetrikus.

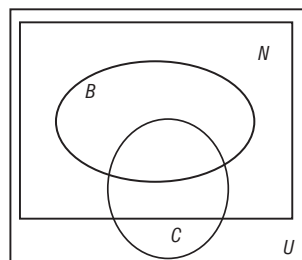


8. GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK – MEGOLDÁSOK

- 908.** Venn-diagramon ábrázolva a kémia tagozatosok (K), a fiúk (F) és a matematikából ötös osztályzatúak (M) halmazát eldönthető, hogy csak a b) állítás igaz biztosan.



- 909.** Venn-diagramon ábrázolva a négy-ütemű (N), a BERREGH márkájú (B) és a Combi típusú autók (C) halmazát eldönthető, hogy csak a c) állítás igaz biztosan.

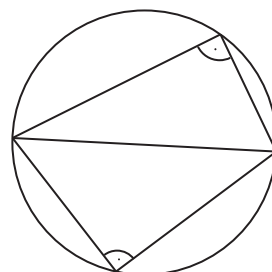


- 910.** $\neg A$ = Van olyan emlős, aminek nincs lába.
 $\neg B$ = Van olyan bogár, ami nem rovar.
 $\neg C$ = Van olyan négyszög, amelynek nincs beírt köre.
 $\neg D$ = Van olyan lakás, melynek van olyan szobája, ahol nincs világítás.
- 911.** $\neg A$ = Minden rombusz négyzet.
 $\neg B$ = Minden paralelogramma trapéz.
 $\neg C$ = Minden sorozat korlátos.
 $\neg D$ = Minden ember iszik alkoholt.

- 912.** a) igaz; b) igaz; c) hamis, pl. a 24 miatt; d) igaz, hiszen $(4, 6, 10) = 60$.

- 913.** a) hamis; b) igaz; c) igaz, a négyzet miatt; d) igaz.

- 914.** a) igaz, például a kör;
 b) hamis, lásd az ábrát;
 c) hamis.



8. GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK – MEGOLDÁSOK

- 915.** $\neg A$ = Nem esik az eső, és nem süt a nap.
 $\neg B$ = Andrea nem szőke vagy nem kék szemű.
 $\neg C$ = Az ABC háromszög nem egyenlő szárú vagy nem hegyesszögű háromszög.
 $\neg D$ = Az $ABCD$ négyszög nem trapéz és nem deltoid.
- 916.** a) $\neg A$; b) $A \wedge B$; c) $\neg A \wedge B$; d) $\neg B \wedge \neg A$;
 e) $A \wedge \neg B$; f) $A \vee B$; g) $\neg A \vee B$.
- 917.** Felhasználva a kettős tagadás törvényét és az ún. De Morgan-azonosságokat:
 a) $\neg(\neg A) = A$. Esik az eső.
 b) $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$. Nem esik az eső vagy nem rossz a kedvem.
 c) $\neg(\neg A \wedge B) = \neg(\neg A) \vee \neg B = A \vee \neg B$. Esik az eső vagy nem rossz a kedvem.
 d) $\neg(\neg B \wedge \neg A) = \neg(\neg B) \vee \neg(\neg A) = B \vee A = A \vee B$. Esik az eső vagy rossz a kedvem.
 e) $\neg(A \wedge \neg B) = \neg A \vee \neg(\neg B) = \neg A \vee B$. Nem esik az eső vagy rossz a kedvem.
 f) $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$. Nem esik az eső és nem rossz a kedvem.
 g) $\neg(\neg A \vee B) = \neg(\neg A) \wedge \neg B = A \wedge \neg B$. Esik az eső és nem rossz a kedvem.
- 918.** a) $A \rightarrow B$; b) $B \rightarrow A$; c) $\neg A \rightarrow \neg B$; d) $\neg(A \wedge \neg B)$; e) $B \vee \neg A$.
- 919.** a) Ha n osztható 15-tel, akkor osztható 5-tel.
 b) Az n pontosan akkor osztható 15-tel, ha osztható 5-tel és 3-mal is.
 c) Ha n osztható 5-tel és nem osztható 3-mal, akkor nem osztható 15-tel.
 d) Ha n nem osztható 15-tel, akkor nem osztható 5-tel vagy nem osztható 3-mal.
- 920.** a) $B \rightarrow A$; b) $B \rightarrow A$.
- 921.** a) $A \rightarrow B$; b) $B \rightarrow A$; c) $A \rightarrow B$; d) $A \leftrightarrow B$.
- 922.** Mivel minden egyes állítás mást állít, ezért legfeljebb egy igaz állítás lehet közöttük! Nem lehet mind hamis, mert akkor az 5. állítás igaz lenne, ami ellentmondás. Csakis egy igaz állítás lehet közöttük, ami a 4. állítás.
- 923.** Móricka állítása nem lehet igaz állítás, mert akkor két egymást követő napon is igazat mondana, ami ellentmondás. Tehát hazudós napon mondta, akkor viszont a következő napon is hazudni fog, így csak szombaton történhetett a dolog.



8. GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK – MEGOLDÁSOK

- 924.** Jelöljük a továbbiakban a szereplőket nevük kezdőbetűjével! Tegyük fel, hogy A igazat mond. Ekkor B hazudik, így C igazat mond, ami ellentmondás. Ha A hazudik, akkor B igazat mond, és C hazudik, ami megfelel C kijelentésének. Tehát A és C hazudik, B pedig igazat mond.
- 925.** A telefonáló igazmondó nem lehet, hiszen ravasznak mondja magát. Akár hazug, akár felemás, az első állítása hamis, így az orvos nem indult el.
- 926.** Ha a 11 szigetlakó között n számú igazmondó van, akkor a 11 válaszban éppen ennyiszor szerepel az n szám. Ez azt jelenti, hogy a kilenc elhangzott válasz mindegyike hazudóstól származik, mert a 3-nál nagyobb számok még a hiányzó válaszokkal együtt sem hangozhattak el ennyiszor, a 2-nél kisebb számok pedig önmaguknál többször hangzottak el. A hiányzó két válasz tehát: 2; 2.
- 927.** A válasz: igen.
Tegyük fel, hogy egy okos, fiatal malac elmegy léghajósna! Az 5. miatt akkor ő szédülős. Ekkor a 2. miatt tisztelettel bánnak vele, a 7. miatt pedig nem megy kötéltáncosna. Akkor a 9. miatt ő kövér. A 3. miatt esernyő van nála, így a 8. miatt nevetségesen néz ki. Mindezekből a 6. miatt adódik, hogy ebédelhet nyilvános helyen. Így a 4. miatt nem ehet zsemlét, ezért az 1. miatt szükségképpen öregnek kellene lennie, ami ellentmondás!



9. Kombinatorika – megoldások

9.1. Kombinatorikai problémák

928. Az összeg 2; 3; 4; ...; 12 lehet, azaz 11 különböző eset van.

929. Írjuk fel az összeget a tagok növekvő sorrendjében!

a) $1+9$; $2+8$; $3+7$; $4+6$; $5+5$, azaz összesen 5 felbontás van.

b) $1+1+8$; $1+2+7$; $1+3+6$; $1+4+5$; $2+2+6$; $2+3+5$;
 $2+4+4$; $3+3+4$, azaz összesen 8 felbontás van.

930. Összesen $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ szakaszt határoznak meg a pontok.

931. Legyen a két párhuzamos egyenes e és f úgy, hogy e -re 4 megjelölt pont, f -re 5 megjelölt pont illeszkedjen!

a) Az egy egyenesre illeszkedő megjelölt pontok nem határoznak meg háromszöget. Kétfajta háromszöget kaphatunk. Az egyik fajta háromszögnek 2 csúcsa az e egyenesre, 1 pedig az f egyenesre illeszkedik. Ebből a fajtából $\frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 5 = 30$ db van. A másik fajta háromszögnek 2 csúcsa az f egyenesre, 1 pedig az e egyenesre illeszkedik. Ezek száma $\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 4 = 40$. Összesen tehát 70 háromszöget határoznak meg a megjelölt pontok.

b) Négyszög csak akkor keletkezik, ha mindkét egyenesről 2-2 megjelölt pontot választunk ki. A négyszögek száma így $\frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 60$.

932. Legyen a szabályos háromszög oldala 3 egység! A keletkezett szabályos háromszögek oldalának hossza 1, 2 vagy 3 egység. Az első fajtából 9 db, a másodikból 3 db, a harmadikból pedig 1 db van. Így összesen 13 db háromszög látható az ábrán.

933. A szám nem tartalmazhatja a 0 számjegyet, mert az a legkisebb, de 0-val nem kezdődhet a szám. A maradék 9 számjegyből kiválasztunk 3-at. Ezt $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ -féleképpen tehetjük meg a különböző sorrendeket nem tekintve különbözőnek. A kiválasztott számok 1-1 megfelelő számot határoznak meg, így összesen 84 db ilyen szám van.



9. KOMBINATORIKA – MEGOLDÁSOK

934. A számjegyek lehetnek 0; 2; 4; 6; 8. Mivel a szám nem kezdődhet 0-val, így az első helyre 4, a másik két helyre 5-5 szám közül választhatunk. Összesen 100 db megfelelő szám van.

Ezek összegét számoljuk ki helyiértékenként! A százasként mindegyik számjegy 25-ször, a tízes, illetve egyes helyiértéken pedig 20-szor fordul elő. Ezek alapján a számok összege $(2 + 4 + 6 + 8)(25 \cdot 100 + 20 \cdot 10 + 20 \cdot 1) = 20 \cdot 2720 = 54\,400$.

935. Az ötjegyű számban csak az 1; 2; 3; 4 és 5-ös számjegyek szerepelhetnek. Az 5-ös szám ötször szerepel, így ilyen szám 1 db van. A szám állhat 4 db négyes és 1 db egyes jegyből, amelyből 5 db van. Végül a szám állhat 3 db hármas és 2 db kettes jegyből, ebből a fajtából 10 db van. Összesen tehát 16 megfelelő szám van.

936. A hatjegyű szám csak 1-es és 2-es számjegyből állhat, így $2^6 = 64$ ilyen szám van összesen.

a) Ezek közül csak a 121212 és 212121 felel meg a feltételnek.

b) Számoljuk össze a számokat a bennük lévő 2-esek száma szerint! Ha 4, vagy ennél több 2-es van, akkor biztosan lesz kettő egymás mellett. 3 db 2-es jegy esetén 4 db megfelelő szám van, a 121212, 211212, 212121 és a 212112. Ha 2 db 2-es van a számban, akkor ezek 5 esetben szerepelnek egymás mellett, és összesen 15 db két 2-et tartalmazó szám van. Így 10 olyan eset van, amikor nincsenek egymás mellett a 2-esek. Az 1 vagy 0 db kettest tartalmazó számok mind megfelelőek, és ezek száma 7. Összesen tehát 21 db olyan szám képezhető, amelyben nincs két 2-es egymás mellett.

937. Egy fő 13 partit játszik.

a) Az összes mérkőzés száma $\frac{14 \cdot 13}{2} = 91$, ha mindenki csak egyszer játszik;

b) Ha oda-visszavágó van, akkor ennek kétszerese, azaz 182.

938. A dominók között vannak olyanok, amelyek mindkét felén egyforma számú pötty van. Ezekből 10 db van. A többi dominó két felén különböző számúak a pöttyök. Ezekből $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ db van. Összesen 55 darab dominó van.

939. a) 2-féle; b) $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ -féle; c) $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ -féle színezés lehet.

940. a) $5! = 120$; b) $4! \cdot 2 = 48$;

941. A szónak $5! = 120$ sorrendje lehetséges. Az azonos betűvel kezdődő sorrendekből 24 db van. Mivel $88 = 3 \cdot 24 + 16$, így az első betű az ábécé sorrend szerinti negye-



9. KOMBINATORIKA – MEGOLDÁSOK

dik betű, azaz M. Az M betűvel kezdődő 24 sorrend második betűje 4-féle lehet, így ezek mindegyikéből 6 db van. Mivel $16 = 6 \cdot 2 + 4$, így a második betű az ábécé sorrend szerinti harmadik betű, K. Az MK kezdetű sorrendek közül a negyedik utolsó betűjét kerestük, ami A.

- 942.** Összesen $5!$, azaz 120-féleképpen ülhetnek le egymás mellé. Ebből mindössze egy esetben ül mindenki a saját helyén. A többi esetet számoljuk össze aszerint, hogy hányan ülnek a saját helyükön! Pontosan 4-en nem lehetnek, mert akkor az ötödik is a saját helyén ülne. Ha 3 ember jó helyen ül, akkor a másik kettő csak egyféleképpen ülhet rossz helyen. Az 5 emberből $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ -féleképpen választhatjuk ki azokat, akik jó helyen ülnek. Ezek szerint 10 olyan eset van, amikor 3-an ülnek a helyükön.

Ha 2 ember ül jó helyen, akkor a többi 3 csak kétféleképp ülhet rossz helyen. Az 5 emberből 10-féleképpen választhatjuk ki azt a 2-t, aki a helyén ül. Így 20 esetben ülnek pontosan ketten jó helyen. Már csak az az eset maradt, amikor csak 1 ember ül a saját helyén. Ezen esetek száma $5 \cdot 9 = 45$. Összesen tehát 76 esetben ül legalább egy ember a saját helyén.

- 943.** a) $2 \cdot 10 = 20$; b) $10 \cdot 5 = 50$; c) $10 \cdot 9 = 90$.

- 944.** A kiolvasás mindkét esetben úgy történik, hogy az I betűtől indulva jobbra, vagy lefelé lépünk, míg elérünk a T betűig.

- a) Minden esetben 4-szer kell jobbra és 3-szor lefelé lépnünk, így elég összeszámolni, hányféleképpen állíthatjuk sorba ezt a 7 lépést. Ezek száma $\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$, így 35-féleképpen olvasható ki a szó.
- b) Most minden lépésnél két választási lehetőség van, ami összesen $2^7 = 128$ esetet jelent.

- 945.** Rendezzük táblázatba az eredmények lehetséges sorrendjeit, és írjuk mellé, hogy hányféleképpen alakulhatott ki az!

1:0 1	2:0 1	3:0 1	4:0 1	5:0 1
	2:1 1	3:1 2	4:1 3	5:1 4
		3:2 2	4:2 5	4:3 9
			4:3 5	5:3 14

A táblázatból kiolvasható, hogy 14-féleképpen alakulhatott ki a végeredmény.

- 946.** a) 8; b) $3 \cdot 5 = 15$; c) $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$.



9. KOMBINATORIKA – MEGOLDÁSOK

947. a) $10! = 3\,628\,800$; b) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604\,800$.

948. Mind a 4 diák esetében két lehetőség van: vagy felveszik, vagy nem. Így összesen $2^4 = 16$ különböző esetet kapunk.

949. a) $4! = 24$; b) $3! = 6$; c) $2 \cdot 3! = 12$; d) $3 \cdot 3! = 18$.

950. 8 helyre 6 kártyát kell elhelyezni. A lehetőségek száma: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20\,160$.

951. Minden fűszernél két választási lehetőség van: vagy beletesszük az ételbe, vagy nem. Így $2^6 - 1 = 63$ eset van, mert ki kell hagyni azt az esetet, amikor egyiket sem tesszük bele.

952. a) A játékban $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ bábu van.

b) Számoljuk össze a bábukat aszerint, hogy melyik két tulajdonságban egyeznek, illetve különböznek az adott bábuval! Mivel 4 tulajdonság van, ez 6 esetet jelent. Az egyező tulajdonság szerint 1 lehetőség van, az eltérő tulajdonság szerint pedig eggyel kevesebb, mint a fajták száma. Így összesen $3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 29$ olyan bábu van, ami két tulajdonságban tér el egy adott bábutól.

953. Használjuk fel, hogy a kocka szemközti lapjain levő számok összege 7!

a) A legnagyobb összeg: $9 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 110$, a legkisebb összeg pedig: $9 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 37$.

b) A torony minden emeletén a 4 oldallapon lévő szám összege 14. Így a legnagyobb összeg $126 + 6 = 132$, a legkisebb pedig $126 + 1 = 127$.

c) Most a legnagyobb összeg: $9 \cdot 6 + 9 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 127$, a legkisebb pedig: $9 \cdot 1 + 9 \cdot 7 + 2 \cdot 2 = 76$.

954. Legyen a két szín piros és kék! Elég az egyik színű, például a kék lapok számát megadni, ez lehet 1, 2, 3, 4 vagy 5. Az 1 kék lappal rendelkező kockák száma 1. Ugyanennyi olyan kocka van, amelynek 5 lapja kék. Ha 2 kék színű lap van, akkor ezek vagy egymás mellett, vagy egymással szemben találhatók, számuk 2, ami megegyezik a 4 kék lapú kockák számával. Ha 3 lapja kék, akkor ezeknek vagy közös az egyik csúcsuk, vagy az egyik lapnak egy-egy közös éle van a másik kettővel. Ezen esetek száma szintén 2. Összesen tehát 8 különböző színezés lehetséges.



9. KOMBINATORIKA – MEGOLDÁSOK

- 955.** Mivel 9 csúcs van és 2 szín, így lesz legalább 5 azonos (pl. piros) színű csúcs. Ezek közül 2 biztosan szomszédos csúcs. Ha a velük szomszédos másik két csúcs közül legalább az egyik piros színű, akkor az általuk meghatározott háromszög megfelelő. Ha mindkét csúcs a másik színű (pl. kék), akkor nézzük azt a csúcsot, amelyik illeszkedik arra a átlóra, amelyre a két kék, illetve a két piros csúcs szimmetrikus. Ha ez a csúcs kék, akkor az előbbi 2 csúccsal, ha viszont piros, akkor az utóbbi két csúccsal alkot egyszínű háromszöget.
- 956.** Osszuk fel a „poharat” 84 egységnégyzetre! A kitöltés azt jelenti, hogy az adott alakzattal le tudjuk-e fedni a négyzeteket maradéktalanul.
- Nem fedhető le, mert páratlan számú oszlop van.
 - Nem fedhető le, mert a bal alsó és jobb alsó négyzet nem fedhető le egyszerre.
 - Lefedhető, ha minden oszlopba 3-3 db 4×1 -es alakzatot teszünk.
 - Színezzük ki a négyzeteket váltakozva két színnel (pl. fekete és fehér) úgy, mint a sakktáblát! Ekkor fekete és fehér négyzetből is 42 van. Az adott alakzat minden esetben 3 fehér és 1 fekete, vagy 3 fekete és 1 fehér színű négyzetet fed le. Mivel a lefedéshez 21 db alakzat kell, ezért a lefedett azonos színű négyzetek száma páratlan. Tehát nem fedhető le az adott alakzattal;
 - Ebben az esetben használjunk soronként váltakozó színezést! A fekete és fehér négyzetek száma most is 42. Az adott alakzat az előzőhöz hasonlóan itt is páratlan számú fekete, illetve fehér mezőt fed le. Mivel most is 21 db alakzat kellene a lefedéshez, ezért ez sem valósítható meg.
- 957.** Ha minden harmadik széken ülnek, akkor a következő személy már biztosan valakinek a szomszédja lesz. Az n legkisebb értéke tehát 20.
- 958.** Az első helyezett a 8 versenyző bármelyike lehet, a második – ha megvan az első – 7 versenyző lehet, és így tovább. Mivel az egyes helyezettek egymástól nem függenek, ezért a verseny lehetséges kimeneteleinek száma: $8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40\,320$.
- 959.** Balról az első könyv a 12 könyv bármelyike lehet, a második – ha leraktuk az első – 11 könyv lehet, és így tovább. Az egyes helyekre történő lerakási lehetőségek függetlenek, ezért az összes lerakások száma: $12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 12! = 479\,001\,600$.
- 960.** Ha mind az 5 gombóc különböző fajtájú, akkor az első gombóc ötféle, a második négyféle lehet, és így tovább. Az összes lehetséges fagyaltok száma ezért:
 $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.



9. KOMBINATORIKA – MEGOLDÁSOK

- 961.** Az első helyre hétféle autó, a második helyre hatféle autó kerülhet, és így tovább, ezért az összes lehetséges sorrendek száma: $7 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$. Évente 252 sorrendet valósíthatnak meg, ezért az első ismétlődés $\frac{5040}{252} = 20$ miatt 20 év múlva következik be.
- 962.** Egy egész szám pontosan akkor osztható 6-tal, ha páros és 3-mal osztható. Ebből adódik, hogy egyrészt a 8-as áll az egyesek helyén, másrészt a többi jegy sorrendje tetszőleges, hiszen a számjegyek összege $1 + 1 + 5 + 8 + 9 = 24$, ezért minden esetben 3-mal osztható számot kapunk. Meg kell tehát határoznunk, hogy az 1, 1, 5, 9 jegyeket hányféleképpen rakhatjuk sorba. Ha a két 1-es jegyet megkülönböztetjük (pl. piros, illetve kék színnel), akkor a lehetséges sorrendek száma az első feladat megoldásában látott elv szerint: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Két olyan sorrend azonban nem számít különbözőnek, amelyek csak az 1-esek színében térnek el! Egy adott számot tehát pontosan kétszer számoltunk meg az 1-esek színezése miatt: piros-kék, kék-piros. A helyes válasz tehát $\frac{24}{2} = 12$.
- 963.** Különböztessük meg a „barakka” szóban szereplő három a betűt egymástól pl. színezéssel, és tegyük ugyanezt a két k betűvel is! Ekkor a szót 7 különböző írásjel alkotja, a belőlük képzett különböző szavak száma az első feladat megoldásában látott elv szerint: $7 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$. Ha két adott szó csak abban tér el egymástól, hogy a betűk ugyanazokon a helyeken állnak, csak az a betűk egymáshoz, valamint a k betűk egymáshoz viszonyított sorrendje más, akkor ezek nem számítanak különbözőnek. Mivel az a betűk sorrendje $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ -féle lehet, a k betűké pedig 2, ezért ezeket a szavakat pontosan $6 \cdot 2 = 12$ -szer számoltuk meg! A „barakka” szó anagrammáinak száma tehát $\frac{5040}{12} = 420$. Egyjegyű prím számokból 4 van: 2, 3, 5, 7. Így minden lehetséges szóhoz 4 végződés tartozik, ezért a lehetséges azonosítók száma: $420 \cdot 4 = 1680$, legfeljebb ennyiszor kell tehát Katinak próbálkoznia.
- 964.** Különböztessük meg az állatok közül a 4 oroszlánt egymástól, és tegyük ugyanezt a két tigrissel! Ekkor a 7 különböző állat sorba rendezéseinek száma az első feladatban látott elv szerint: $7 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$. Ha két adott sorrend csak abban tér el egymástól, hogy az egyes állatfajták ugyanazokon a helyeken állnak, csak az oroszlánok egymáshoz, valamint a tigrisek egymáshoz viszonyított sorrendje más, akkor ezek a sorrendek nem számítanak különbözőnek. Mivel az oroszlánok sorrendje $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ -féle lehet, a tigriseké pedig 2-féle, így az előző feladat megoldásában láttak szerint a néző szempontjából $\frac{5040}{24 \cdot 2} = 105$ -féle sorrend alakulhat ki.



9. KOMBINATORIKA – MEGOLDÁSOK

965. Ha a csak párok helyzetét figyeljük (azaz egy párt egy „objektumként” kezelünk), akkor ezt figyelembe véve a lehetséges, különböző ülésrendek száma: $(4 - 1)! = 6$. Minden páron belül kétféle sorrend lehetséges (a férj a feleség jobbján és balján is ülhet). Azaz a lehetséges, különböző ülésrendek száma: $6 \cdot 2^4 = 96$.

966. Az előző két feladat megoldásában szereplő gondolatmenetet alkalmazva:

$$\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} = 1680.$$

Azaz 1680 különböző sorrendben fizethetünk az érmékkel.

967. Az első kockán 6 szám lehet, a másodikon 5 szám és így tovább, ezért az első feladatban látott elvet alkalmazva a válasz: $6 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$.

968. A 3 szín eloszlása az alábbi módokon lehetséges, ha a sorrendjüket nem vesszük figyelembe (a hármasok az egyes színezésekben szereplő piros, fehér és kék darabok számát jelentik):

$(3,0,0); (0,3,0); (0,0,3); (2,1,0); (2,0,1); (0,1,2); (0,2,1); (1,2,0); (1,0,2); (1,1,1)$.

Az első három hármas nem megfelelő, ugyanis a színezést egyetlen színnel nem tudjuk úgy megoldani, hogy a szomszédos darabok különbözőek legyenek. A többi 7 lehetőség mindegyike megoldható.

969. A páratlan, 5-tel osztható egész számok végződése csak 5 lehet. Azaz az egyesek helyiértékén ötösnek kell állnia. A szám maradék 3 jegyét a négy lehetőségéből

$$\binom{4}{3} = 4 \text{ különböző módon választhatjuk ki, majd minden esetben } 3! = 6 \text{ különböző}$$

sorrend lehetséges. Így a képezhető, megfelelő négyjegyű számok száma: $4 \cdot 6 = 24$.

970. Az aranyérmét megnyerő embert nyolcféleképpen, majd az ezüstérmest minden esetben hétféleképpen, végül a bronzot nyerő versenyzőt hatféleképpen választhatjuk meg. Így a lehetséges híradások száma: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

971. Egyvalaki fog 2-t kapni az érmék közül, a többiek 1-et. Ezek alapján 3 különböző szétosztás lehetséges aszerint, hogy ki kap a 2 eurót.

972. Mindenki 3 különböző szavazatot adhat le, azaz összesen $3^{25} \approx 8,473 \cdot 10^{11}$ különböző szavazás lehetséges.



9. KOMBINATORIKA – MEGOLDÁSOK

973. A bal felső negyedbe kerülő képet 10, majd ezután a jobb felső negyedbe kerülőt 9, a bal alsóba teendő 8 és végül a jobb alsóban elhelyezendő 7 különböző módon választhatjuk meg, azaz a lehetséges lapok száma: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Másként is számolhattunk volna:

A 4 felhasználandó képet $\binom{10}{4} = 210$ különböző módon választhatjuk ki, majd ezeket $4! = 24$ módon rakhatjuk sorba, ami alapján $210 \cdot 24 = 5040$ különböző lap-terv készíthető.

974. A 3 felhasználandó szín kiválasztása $\binom{5}{3} = 10$ különböző módon lehetséges. A dominancia sorrend ezek után $3! = 6$ -féleképpen állítható fel. Azaz a ház $10 \cdot 6 = 60$ különböző módon festhető ki.

975. Először kiválasztjuk a 30 emberből azt a 6-ot, aki az első szobába kerül, ezt $\binom{30}{6}$ -féle módon tehetjük meg. Ezután a maradék 24 emberből kiválasztjuk azt a 6-ot, aki a második szobába kerül, ezt $\binom{24}{6}$ -féle módon tehetjük meg. Ezt a gondolatmenetet folytatva, kihasználva, hogy az egyes szobák beosztásai egymástól függetlenek, az összes lehetséges beosztások száma:

$$\binom{30}{6} \cdot \binom{24}{6} \cdot \binom{18}{6} \cdot \binom{12}{6} \cdot \binom{6}{6} = \frac{30!}{(6!)^5} \approx 1,371 \cdot 10^{18}.$$

976. Az előző feladat megoldásában látott gondolatmenetet alkalmazhatjuk. Az összes lehetséges ültetések száma:

$$\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} \approx 3,055 \cdot 10^{11}.$$

977. Az 52 lapból 5-öt $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ különböző módon választhatunk ki.

978. Az első embernek 32 lapból választunk 5-öt, ezt $\binom{32}{5} = 201\,376$ módon tehetjük meg.

Ezután a második embernek 27 lapból választunk 5-öt, amit $\binom{27}{5} = 80\,730$ -féleképpen tehetünk meg.



9. KOMBINATORIKA – MEGOLDÁSOK

A harmadik embernek a maradék 22 lapból adunk 5-öt, ez $\binom{22}{5} = 26\,334$ különböző módon következhet be. Így a lehetséges osztások száma:
 $201\,376 \cdot 80\,730 \cdot 26\,334 \approx 4,281 \cdot 10^{14}$.

979. Az elnököt 20-féleképpen választhatják ki, majd a titkárt a többi tag közül $\binom{19}{2} = 171$ különböző módon választhatják meg.

Azaz a lehetséges vezetőségek száma: $20 \cdot 171 = 3420$.

980. Az egyes csoportokban a szétosztási lehetőségek száma rendre:

$$\binom{35}{13}; \binom{30}{11}; \binom{27}{9}; \binom{20}{7}; \binom{8}{5}.$$

Azaz a lehetséges szétosztások száma: $\binom{35}{13} \cdot \binom{30}{11} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{20}{7} \cdot \binom{8}{5} \approx 1,641 \cdot 10^{30}$.

981. A szám paritása csak az egyesek helyiértékén álló szám paritásától függ. Elég csak ezt vizsgálnunk. Ez akkor lesz páros, ha a két kockával dobott szám összege páros. Ez lehet: 2, 4, 6, 8, 10, 12. Az egyes esetek rendre 1, 3, 5, 5, 3, 1 esetben fordulnak elő ($2 = 1 + 1$; $4 = 1 + 3$; $4 = 2 + 2$; $6 = 3 + 1$ stb.). Azaz a lehetőségek száma a páros esetben: $1 + 3 + 5 + 5 + 3 + 1 = 18$.

A páratlan esetben a megfelelő összegek: 3, 5, 7, 9, 11. Az egyes esetek itt 2, 4, 6, 4, 2 esetben fordulnak elő. Azaz a lehetőségek száma a páratlan esetben is: $2 + 4 + 6 + 4 + 2 = 18$.

Azaz a két esemény bekövetkezésének esélye egyenlő.

982. Az A játékos akkor nyer, ha az összeg: 4, 7 vagy 10, a B játékos akkor nyer, ha az összeg: 2, 5, 8, 11. A 4, 7, 10 összeg rendre 3, 6, 3 esetben, a 2, 5, 8, 11 összeg rendre: 1, 4, 5, 2 esetben jöhet létre.

Azaz az A nyerhet $3 + 6 + 3 = 12$, míg a B szintén $1 + 4 + 5 + 2 = 12$ esetben. Tehát a játék igazságos, mindkét játékosnak ugyanakkora az esélye a győzelemre.

983. A feladatok elvégzésére 4 nap áll rendelkezésünkre (hétfő, kedd, szerda, csütörtök).

Ebből a 4 napból választjuk ki a 3 feladatra szánt napot. Ezt $\binom{4}{3} = 4$ különböző

módon tehetjük meg. Ezután a kiválasztott napokra be kell osztanunk, hogy melyik feladatot akarjuk aznap elvégezni. Ezt $3! = 6$ módon tehetjük meg (sorba raktuk a feladatokat). Ebből következően összesen $4 \cdot 6 = 24$ különböző módon oszthatjuk be az időnket.



9. KOMBINATORIKA – MEGOLDÁSOK

984. Mindhárom színből 3-at húzunk, ez pedig $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3} = 1000$ különböző módon lehetséges.

985. Az első csapatot kiválaszthatjuk $\binom{15}{6} = 5005$ különböző módon. A második csapatot a maradék 9 emberből választhatjuk $\binom{9}{6} = 84$ különböző módon. Azaz a két csapatot $\frac{5005 \cdot 84}{2} = 210\,210$ különböző módon választhatjuk ki, ahol azért kell 2-vel osztani a szorzatot, mert minden csapat kettős kiválasztását duplán számoltunk a fenti szorzatban.

986. A bírót 9 módon választhatjuk meg. A többieket $\frac{\binom{8}{4}}{2} = 35$ módon oszthatjuk két csapatba, ugyanis az 1. csapatba $\binom{8}{4}$ különböző módon választhatjuk be az embereket, de így minden kettéosztást pontosan kétszer számolunk. Azaz a két csapat létrehozása $9 \cdot 35 = 315$ különböző módon lehetséges.

987. Az első csapatot $\binom{20}{5} = 15\,504$, a másodikat $\binom{15}{5} = 3003$, a harmadikat $\binom{10}{5} = 252$ módon választhatjuk meg, így az utolsó csapat már egyértelműen meghatározott. Minden egyes csapatokra bontást $4! = 24$ -szer számoltunk, a kiválasztott csapatok sorrendje ugyanis nem számít. Azaz ha a csapatok közt nincs kitüntetett csapat, a lehetséges különböző szétosztások száma: $\frac{15\,504 \cdot 3003 \cdot 252}{24} = 488\,864\,376$.

988. A 4 eurót az alábbi három összetételben fizethetjük ki: 4 db 1 euróssal, 2 db egy euróssal és egy 2 euróssal, 2 db 2 eurós érmevel.

Az első és a harmadik esetben a megkülönböztethető lehetőségek száma mindkét esetben 1. A második összetétel esetén a megkülönböztethető sorrendek száma:

$\frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ (az alapján különböztetjük meg őket, hogy hányadikként dobjuk a kéteurós érmeit).

Azaz a megkülönböztethető lehetőségek száma: $1 + 3 + 1 = 5$.

989. A 6 euró kifizetése négy különböző összetételben lehetséges: 6 db 1 eurós érmevel, 4 db 1 eurós és 2 db 2 eurós érmevel, 2 db 1 eurós és 2 db 2 eurós érmevel vagy 3 db 2 eurós érmevel.



9. KOMBINATORIKA – MEGOLDÁSOK

Az első és az utolsó esetben a megkülönböztethető sorrendek száma 1.

A 2. esetben az öt érmét $\frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$ különböző sorrendben dobhatjuk a gépbe, megkülönböztetve őket aszerint, hogy a 2 eurós érmét hányadikként dobjuk be.

A 3. esetben a 4 érme lehetséges sorrendjei hasonlóképp számolhatók: $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$.

Azaz a megkülönböztethető lehetőségek száma: $1 + 5 + 6 + 1 = 13$.

990. A feltételeknek megfelelő háromszögek oldalhosszúság-hármasai a következő hármasok közül kerülhetnek ki: (1,2,6); (1,3,5); (2,3,4).

A háromszög-egyenlőtlenséget közülük csak a harmadik hármas teljesíti, mely esetben a lehetséges színezések száma $3! = 6$.

991. A feltételeknek megfelelő háromszögek oldalhosszúság-hármasai a következő hármasok közül kerülhetnek ki: (1,1,5); (1,2,4); (1,3,3); (2,2,3).

A háromszög-egyenlőtlenséget csak a 3. és a 4. hármas teljesíti, ezek egyenlő szárú háromszögek. Ekkor az alap színét 3 különböző módon választhatjuk meg, a szárak a másik két színre színezendők. Azaz ezekben az esetekben a színezett háromszögek száma 3 (az alap színe szerint megkülönböztethető). Így a megfelelő színezett háromszögek száma: $3 \cdot 2 = 6$.

992. A 10 pár sorrendjét az asztal mellett $10! = 3\,628\,800$ különböző módon határozhatjuk meg. Minden egyes pár esetén 2 különböző lehetőség van arra, hogy ők hogyan helyezkednek el az asztal két oldalán. Így minden egyes pár sorrendje esetén $2^{10} = 1024$ különböző ülésrend készíthető. Azaz az összes megfelelő ülésrend száma: $10! \cdot 2^{10} = 3\,715\,891\,200$.

993. A négy pár legyen (A,a); (B,b); (C,c); (D,d), ahol a nagybetűk a hölgy tagot, a kisbetűk pedig a férfit jelölik. A megfelelő táncrendek:

(A,b); (B,a); (C,d); (D,c) (A,c); (B,a); (C,d); (D,b) (A,d); (B,a); (C,b); (D,c)
 (A,b); (B,c); (C,d); (D,a) (A,c); (B,d); (C,a); (D,b) (A,d); (B,c); (C,a); (D,b)
 (A,b); (B,d); (C,a); (D,c) (A,c); (B,d); (C,b); (D,a) (A,d); (B,c); (C,b); (D,a).

Azaz 9 megfelelő táncrend készíthető.

994. Azt, hogy melyik szülőpár melyik sátorban alszik, 2 különböző módon választhatjuk meg.

Az ötszemélyes sátorban fennmaradó 3 helyre 2 vagy 3 gyereket kell választanunk.

Ha 2 gyerek alszik még ott, azt $\binom{4}{2} = 6$ különböző módon választhatjuk ki a 4 gyermek közül.



9. KOMBINATORIKA – MEGOLDÁSOK

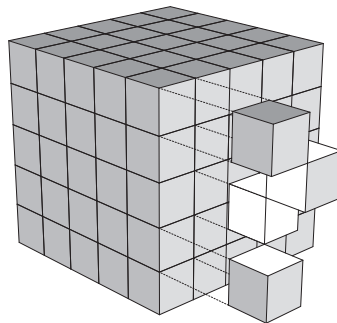
Ha 3 gyerek alszik még ott, azt $\binom{4}{3} = 4$ különböző módon választhatjuk ki.

Így a lehetséges éjszakai beosztások száma: $2 \cdot (6 + 4) = 20$.

995. A kocka éleit a daraboláskor $\sqrt[3]{125} = 5$ egyenlő részre osztottuk.

Pontosan két festett lapja azoknak a kiskockáknak lesz, amelyek a nagy kocka élei mentén, nem a csúcs pozíciójában voltak. Ilyen kiskockából, mivel 12 éle van a kockának $12 \cdot 3 = 36$ darab lesz. A három festett lappal azok a kiskockák rendelkeznek, amelyek a nagy kockában a csúcs pozíciójában voltak. Ilyenből 8 darab lesz.

Az egyetlen festett lappal sem rendelkező kockák az eredeti kocka belsejében helyezkednek el, ezekből $(5 - 2)^3 = 27$ darab lesz. A fennmaradó kockák mind egyetlen festett lappal rendelkeznek, belőlük tehát $125 - (36 + 8 + 27) = 54$ darab lesz. Ami úgy is megkapható, ha végig gondoljuk, hogy a 6 darab lap közepén elhelyezkedő kiskockák száma: $6 \cdot 3^2 = 54$.



996. A 8 kék golyó között 7 hely van, továbbá az első, illetve az utolsó golyó is lehet piros, azaz összesen 9 hely közül kiválasztva azt az 5-öt, ahová piros kerül, megkapjuk a lehetséges lerakások számát. A válasz:

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126.$$

997. A számlálót szorzattá alakítva, felhasználva a faktoriális definícióját:

$$\frac{n^2 + n}{(n+1)!} = \frac{n \cdot (n+1)}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

998. A számlálót szorzattá alakítva, felhasználva a faktoriális definícióját:

$$\frac{(n^2 + n - 2) \cdot (n^3 + n^2)}{(n+2)!} = \frac{(n+2) \cdot (n-1) \cdot n^2 \cdot (n+1)}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n}{(n-2)!}.$$

999. Közös nevezőre hozunk, felhasználjuk, hogy $(n+1)! - (n+1) \cdot n!$:

$$\frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)!} - \frac{n}{n!} = \frac{n^2 + 2n + 1 - (n+1) \cdot n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!}.$$



9. KOMBINATORIKA – MEGOLDÁSOK

1000. A bal oldalon álló összeg tagjai rendre az n elemű halmaz $0, 1, 2, \dots, n$ elemű részhalmazainak számát adják meg. Azaz az összeg megadja az n elemű halmaz részhalmazainak számát. Ebből pedig éppen 2^n darab van. Ez belátható a következőképpen: a halmaz tetszőleges részhalmazát megadhatjuk úgy, hogy a halmaz minden egyes eleméhez 1-et vagy 0-át rendelhetünk aszerint, hogy a megfelelő elem a szóban forgó részhalmaznak eleme vagy sem. Így minden egyes részhalmaz azonosítható egy n hosszúságú 0-1 sorozattal és viszont. Ezekből a sorozatokból éppen 2^n darab van.

1001. Tekintsünk egy n elemű halmazt, jelölje ezt U ! Az azonosság bal oldalán össze-számoljuk azokat az (A, B) halmazpárokat, amelyek U részhalmazai és amelyekre

$$B \subseteq A \text{ és } |A| = k; |B| = l, \text{ ugyanis a megfelelő } A\text{-t } \binom{n}{k} \text{ különböző módon, majd}$$

ennek a B -vel jelölt l elemű részhalmazát minden esetben $\binom{k}{l}$ különböző módon tudjuk kiválasztani.

Az azonosság jobb oldalán ugyanezeket a párokat számoljuk össze, csak először B -t

választjuk ki az alaphalmazból (ezt $\binom{n}{l}$ különböző módon tehetjük meg), majd ezt

bővítjük a maradék $(n-l)$ elemből kiválasztott $(k-l)$ darab elemmel A halmazzá.

Ezt éppen $\binom{n}{l} \cdot \binom{n-l}{k-l}$ különböző módon tehetjük meg.

1002. Hasonlóan az előző **1001.** feladat megoldásához tekintsünk egy n elemű halmazt, jelölje ezt U ! Az azonosság bal oldalán a következő (A, B, C) halmaz-hármasokat számoljuk össze:

$$\{(A, B, C) : C \subseteq B \subseteq A \subseteq U; |A| = k; |B| = l; |C| = m\}.$$

Válasszuk ki először a megfelelő A halmazt, majd annak a megfelelő B részhalmazait, és végül B -nek a megfelelő C részhalmazait! Ezt a kiválasztás-sorozatot

éppen $\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{l} \cdot \binom{l}{m}$ különböző módon tehetjük meg. Ha ugyanezeket a halmaz-

hármasokat úgy számoljuk össze, hogy kiindulunk a C halmazból (amit $\binom{n}{m}$

módon választhatunk meg), majd ezt bővítjük B -vé (ezt $\binom{n-m}{l-m}$ módon tehet-

jük meg a fennmaradó $n-m$ elemből $l-m$ elemet választva), és végül B -t A -vá

$\binom{n-l}{n-l-(k-l)} = \binom{n-l}{n-k}$ különböző módon bővíthetjük. Azaz a megfelelő tartal-

mazkodó halmazhármasok száma: $\binom{n}{m} \cdot \binom{n-m}{l-m} \cdot \binom{n-l}{n-k}$.



9. KOMBINATORIKA – MEGOLDÁSOK

1003. A Pascal-háromszög szimmetriáját kihasználva az azonosság bal oldalán minden

$$\text{összeadandó átírható: } \binom{n}{i}^2 = \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{n-i}.$$

Legyenek U és V n elemű, diszjunkt halmazok! A fentiek alapján a bal oldali összeg egy tagja összeszámolja, hogy hány különböző módon választhatunk ki az U -ból i , és ehhez V -ből $n - i$ elemet. Az összeg tehát megadja, hogy hányféleképpen választhatunk ki a két halmazból együttesen n darab elemet. Ezt adja meg a jobb oldal is.

1004. A binomiális együtthatók definíciója alapján:

$$\frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot ((n-1)-(k-1))!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

1005. Ugyanannyi van belőlük. $9 \cdot 10^4 = 90\,000$ ötjegyű szám van, hiszen balról az első számjegy 9-féle lehet, a többi négy számjegy pedig egymástól függetlenül 10-féle.

Közülük minden ötödik 5-tel osztható, így $90\,000 - \frac{90\,000}{5} = 72\,000$ 5-tel nem osztható ötjegyű szám van.

Ha az első jegy nem 5-ös, akkor 8-féle lehet, ha a második nem 5-ös, akkor 9-féle lehet. Mivel a többi jegy 10-féle lehet, ezért az ilyen számok száma összesen $72 \cdot 1000 = 72\,000$.

1006. Legyen n a csapatok száma! Mivel minden csapat $n - 1$ másikkal játszik, így a győzelmek száma $n(n - 1) - n = n(n - 2)$, ezért a pontokra nézve felírható, hogy $3n(n - 2) + 2n = 900$; $n(3n - 4) = 900$; ahonnan a 900 osztóit próbálgatva vagy a $3n^2 - 4n - 900 = 0$ egyenletet megoldva adódik, hogy $n = 18$. Tehát 18 csapat vett részt a bajnokságban.

1007. A binomiális tételt felhasználva számoljuk ki $(1 - 1)^n$ értékét!

$$0 = (1 - 1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot 1^2 - \dots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n}$$

Ez éppen a bizonyítandó azonosság.

1008. A 4 eltalált számot a 6 nyerőszám közül $\binom{6}{4}$ -féle módon választhatjuk ki. A további 2 szám a 39 nem nyerő számból kerül kiválasztásra, ezt $\binom{39}{2}$ -féle módon tehetjük meg, így az összes, a feltételnek megfelelő kitöltések száma:

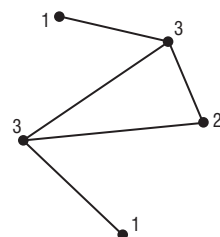
$$\binom{6}{4} \cdot \binom{39}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{39 \cdot 38}{2} = 11\,115.$$



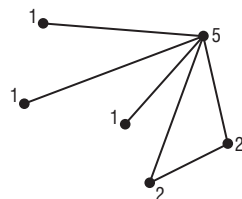
10. Gráfok – megoldások

10.1. Gráfelmélet

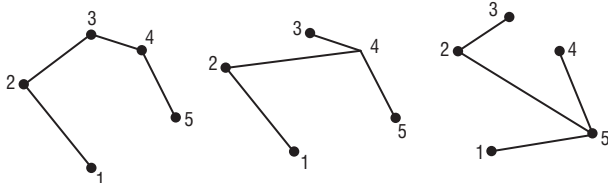
1009. A feladatban szereplő társaság ismeretségi gráfja (a pontok jelölik a társaság tagjait és éllel kötjük össze azokat, akik ismerik egymást):



1010. A feladatban szereplő társaság ismeretségi gráfja (a pontok jelölik a társaság tagjait és éllel kötjük össze azokat, akik ismerik egymást):

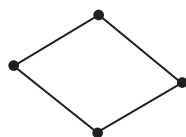


1011. A válasz igen:



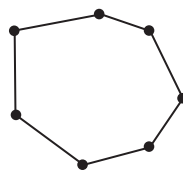
1012. Mivel minden pont 9 másikkal lesz összekötve, továbbá egy összekötő szakasz egyszerre két ponthoz tartozik, ezért az összekötő szakaszok száma: $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

1013. Kössük körbe a gépeket az alábbi ábra szerint:



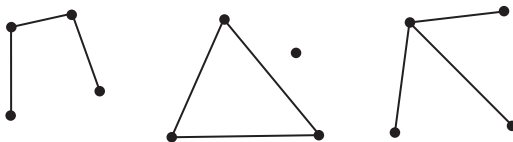
10. GRÁFOK – MEGOLDÁSOK

- 1014.** Mivel egy adott ismeretség egyszerre két emberhez tartozik, ezért az ismeretségek száma: $\frac{7 \cdot 2}{2} = 7$.



- 1015.** Nem. Ha összeadjuk a válaszokban szereplő számokat, akkor a társaságban lévő ismeretségek számának kétszerese kellene hogy adódjon, hiszen egy adott ismeretség egyszerre két emberhez tartozik. Mivel az összeg 25, ami páratlan, ezért ezek a válaszok nem lehetségesek.

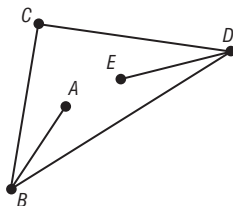
- 1016.** A három különböző gráf:



- 1017.** 25 csúcsú gráfok közül a minimális összefüggő gráfok 24 élt tartalmazó fák, azaz a 23 kábel biztosan nem lesz elegendő.
- 1018.** Nem lehetséges. A foksámok lehetnek: 0, 1, 2, 3, 4. Azaz ha minden foksám különböző, akkor mindegyiknek elő kell fordulnia. A 0 fokú csúcs izolált csúcs lenne, ami nem fordulhat elő, ugyanis az egyik csúcs foka 4, ami azt jelenti, hogy az összes többi csúccsal össze van kötve.
- 1019.** Nem lehetséges. A foksámok lehetnek: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Azaz ha minden foksám különböző, akkor mindegyiknek elő kell fordulnia. A 0 fokú csúcs izolált csúcs lenne, ami nem fordulhat elő, ugyanis az egyik csúcs foka 6, ami azt jelenti, hogy az összes többi csúccsal össze van kötve.
- 1020.** Nem, mivel az, aki 5 emberrel fogott kezét mindenkivel kezét, fogott, így nem lehet a társaságban olyan ember, aki senkivel sem fogott kezét.
- 1021.** Nem, mivel az a két ember, aki 5 emberrel fogott kezét, mindenkivel kezét fogott, így nem lehet a társaságban olyan ember, aki pontosan egyszer fogott kezét.



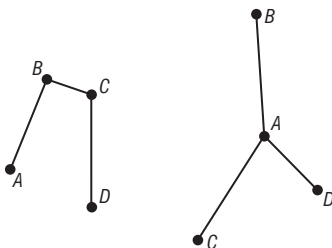
1022.



Az A és az E csúcsok.

1023. A lányok által felírt számok összegének egyenlőnek kell lennie a fiúk által felírt számok összegével (hiszen minden tánc pontosan 1-1 lánynál, illetve fiúnál szerepel). Ebből következik, hogy a cédulákra írt számok összegének párosnak kell lenni, ami esetünkben nem teljesül, így a feladat kérdésére a válasz: nem.

1024. A négy gép egy gráf négy csúcsa, mely gráfban az élek az összekötő kábeleknak felelnek meg. Négycsúcsú egyszerű gráf három éllel csak úgy lehet összefüggő, ha a gráf fa. Az izomorfiától eltekintve két megfelelő fa létezik a négy csúcson:



Az első esetben a távolságok:

$$d(A, B) = 1; d(A, C) = 2; d(A, D) = 3; d(B, C) = 1; d(B, D) = 2; d(C, D) = 1,$$

ezek átlaga $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

A második esetben a távolságok:

$$d(A, B) = 1; d(A, C) = 1; d(A, D) = 1; d(B, C) = 2; d(B, D) = 2; d(C, D) = 2,$$

melyek átlaga $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, azaz a második esetben az átlagos távolság kisebb, tehát csillag alakban kell a gépeket összekötni.

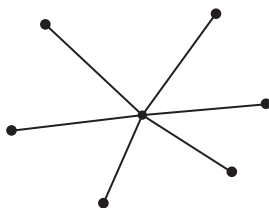
1025. 5 különböző gyerekből $\binom{5}{2} = 10$ pár választható ki, ami azt jelenti, hogy a 19 foglalkozáson legalább 190 különböző párnak kellett lennie, mivel semelyik pár sem



10. GRÁFOK – MEGOLDÁSOK

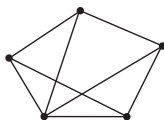
szerepelhet kétszer. Mivel n különböző tanulóból $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ pár alkotható, így $n(n-1) \geq 380$ -nak kell teljesülni, ahonnan $n \geq 20$.

1026. Igen, például az alábbi úthálózat esetén:



1027. Minden pillanathoz tartozik egy gráf, melynek csúcsai a csapatok, és közülük azok vannak éllel összekötve, mely csapatok az adott pillanatig már játszottak egymással. A gráf minden fokszáma a 0, 1, 2, ..., 15 számok közül kerül ki, azaz 16-féle fokszámunk van. A skatulyaelv alapján ez azt jelenti, hogy vagy minden csúcs különböző fokszámú, azaz minden fokszám pontosan egyszer fordul elő, vagy van két azonos fokú csúcs. Az első lehetőség nem állhat fenn, akkor ugyanis lenne egy izolált csúcs a gráfban, és egy olyan csúcs is, ami az összes csúccsal össze van kötve, ami nyilván lehetetlen. Azaz van két azonos fokú csúcs, tehát van két olyan csapat, akik addig azonos számú mérkőzést játszottak le.

1028.



1029. A csapatoknak megfelel egy gráf 10 csúcsa, a lejátszott mérkőzéseknek pedig az azt játszó csapatokat összekötő élek. A feladat szerint 11 éle van a gráfnak, azaz a fokszámok összege 22. Ha minden csúcs fokszáma legfeljebb 2 lenne, akkor ez nem teljesülhetne, azaz legalább egy csúcsnak legalább 3 a fokszáma, ami éppen azt jelenti, hogy már legalább 3 meccsen van túl a megfelelő csapat.

1030. A csapatoknak megfelel egy gráf 16 csúcsa, a lejátszott mérkőzéseknek pedig az azt játszó csapatokat összekötő élek. A feladat szerint 35 éle van a gráfnak, azaz a fokszámok összege 70. Ha minden csúcs fokszáma legfeljebb 4 lenne, akkor ez nem teljesülhetne, azaz legalább egy csúcsnak legalább 5 a fokszáma, ami éppen azt jelenti, hogy már legalább 5 meccsen van túl a megfelelő csapat.



10. GRÁFOK – MEGOLDÁSOK

- 1031.** A bizonyítás az előző feladat megoldásához hasonló. A gráf éleinek száma 50, azaz a foksámok összege 100, ami nem teljesülhetne, ha minden csúcs fokszáma legfeljebb 6 lenne.
- 1032.** Színezzük feketére és fehérre a mezőket (sakktáblaszerűen)! A 49 mezőből legyen 24 fehér és 25 fekete! A sápszó után minden báb a jelenlegi színétől eltérő színű mezőre kell hogy lépjen. Ez nyilván nem lehetséges úgy, hogy minden mezőn egy báb álljon, mivel a fekete mezőkből eggyel több van.
- 1033.** Bontsuk $2 \cdot 2$ -es négyzetekre a táblát! Egy ilyen négyzetben „körbe” mehetnek a bábok, azaz ciklikusan mozdulnak. Így elérhető, hogy a sápszó után is minden mezőn pontosan egy báb álljon.
- 1034.** Péter 28 osztálytársa közül valamelyiknek 0, 1, ..., 28 barátja lehet az osztályban, és mivel a 0 és a 28 egyszerre nem szerepelhet, így az osztálytársak barátainak a száma kétféleképpen alakulhat: 0, 1, 2, ..., 27 vagy 1, 2, ..., 28.
Akinek a legtöbb barátja van, az barátkozik Péterrel, akinek a legkevesebb, az nem. Akinek a „második legtöbb” barátja van, az barátkozik Péterrel, akinek a „második legkevesebb” az nem. Ezt a gondolatmenetet folytatva az osztálytársak 14 párba sorolhatóak, és adódik, hogy Péternek 14 barátja van az osztálytársai között.
- 1035.** Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy a 8 forduló után bármely három csapat között volt legalább egy mérkőzés! Szemeljük ki egy csapatot, és jelöljük A -val! Az A 8 másik csapattal játszott, így 9-cel nem. A 9 csapat közül bármely kettőnek játszania kellett egymással feltevésünk szerint. Ez azt jelenti, hogy a 8 forduló mérkőzéseit egymás közt játszották le, ami nyilvánvaló ellentmondás, hiszen páratlan sok csapat között már egyetlen forduló sem bonyolítható le.
- 1036.** Mivel döntetlen nincs, ezért minden páros meccsen 2 játékos nyer, és 2 veszít. Jelöljük minden játékost a nevének a kezdőbetűjével! Az egy játékos által lejátszott meccsek száma 12, ugyanis pl. az A - B pár 3 meccset játszik (C - D , C - E , D - E ellen), de B helyén 4 játékos lehet, ezért A meccseinek száma 12. Ebből nyomban adódik, hogy A az összes meccsét elvesztette. A többi 4 játékos A ellen fejenként hatszor játszott, ugyanis pl. A - B ellen C játszott a C - D , illetve C - E párosokban, de B helyén D , illetve E is állhat, ami összesen $3 \cdot 2$ meccs. Ezek szerint az A -t tartalmazó párok ellen a másik 4 játékos mindegyike 6 győzelmet aratott. Így amikor B nem A ellen játszott, és nem A -val volt, akkor veszített. Ilyen meccsből összesen 3 volt:
 B - $C \leftrightarrow D$ - E ; B - $D \leftrightarrow C$ - E ; B - $E \leftrightarrow C$ - D .
Ezeket a meccseket C , D és E mindegyike 2 győzelmet aratott, így fejenként 8



10. GRÁFOK – MEGOLDÁSOK

győzelmük van és 4 vereségük, melyek közül hármát A -val, egyet pedig B -vel párban játszva szenvedtek el. Tehát Dezső összesen 8 győzelmet aratott.

1037. a) Az e egyenesen kijelölt valamely pontot az f egyenesen kijelölt 3 pont bármelyikével összeköthetjük, ezért összesen $4 \cdot 3 = 12$ egyenest határoznak meg a pontok.

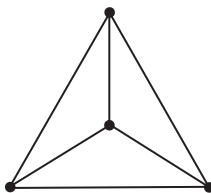
b) Biztos, hogy a háromszögnek pontosan 2 csúcsa van az egyik egyenesen, és 1 a másikon. Az olyan háromszögek száma, melyeknek 2 csúcsa az e egyenesen van:

$$\binom{4}{2} \cdot 3 = 18. \text{ Az olyan háromszögek száma, melyeknek 2 csúcsa az } f \text{ egyenesen}$$

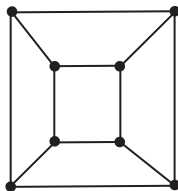
$$\text{van: } \binom{3}{2} \cdot 4 = 12, \text{ ezért az összes háromszögek száma } 30.$$

1038. Az állítás igaz. Legyen ugyanis v a gráf egy tetszőleges csúcsa, és tekintsük a v -ből induló leghosszabb utat! Ezen út v -től különböző végpontjából indul még él, ami nincs benne az útban. Ennek az élnek kört kell bezárnia, ugyanis ellenkező esetben folytatható lenne az út, és nem lenne maximális.

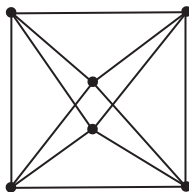
1039.



1040.



1041.



10. GRÁFOK – MEGOLDÁSOK

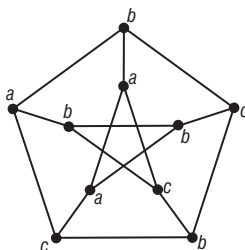
- 1042.** Tegyük fel, hogy n számú játékos indult! Mivel egy játékos $n - 1$ másikkal játszott, így az összes mérkőzések száma $\frac{n(n-1)}{2}$, hiszen minden mérkőzés két játékoshoz tartozik. Ez alapján:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 91;$$

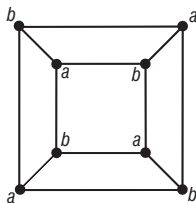
$$n^2 - n - 182 = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a pozitív megoldása $n = 14$, tehát ennyien indultak a versenyen.

- 1043.** A gráf biztosan nem színezhető két színnel, ugyanis van benne páratlan hosszúságú kör, melynek csúcsai nyilván nem színezhetőek 2 színnel megfelelően. Azaz legalább 3 színre van szükség (jelölje a színeket a, b, c), mely 3 szín elegendő. Az ábra egy megfelelő színezést mutat.



- 1044.** A gráfban minden kör páros hosszúságú, azaz a gráf két színnel színezhető. Egy megfelelő színezést mutat az ábra (a két szín jele a és b).



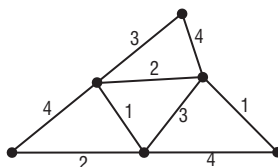
- 1045.** Az 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 számok színének különbözni kell, mivel ezek páronként relatív prímek. Azaz legalább kilenc színre lesz szükség. Ennyi szín elég is, ugyanis ha a fenti számokat kiszínezzük a kilenc színnel, majd a többi egészet prímtényezők szorzatára bontva mindegyik számot az egyik prímtényezőjének az előbb definiált színére színezzük, akkor megfelelő színezést kapunk. Például:



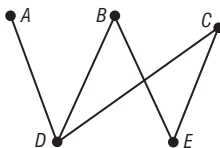
10. GRÁFOK – MEGOLDÁSOK

Szám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Szín sorszáma	1.	2.	3.	2.	4.	2.	5.	2.	3.	2.
Szám	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Szín sorszáma	6.	2.	7.	2.	3.	2.	8.	2.	9.	2.

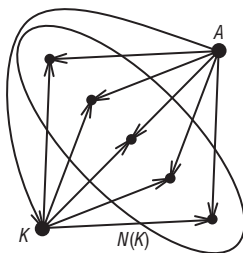
- 1046.** Mivel a gráfban van negyed fokú csúcs, ezért legalább 4 színre van szükség (az egy csúcsba befutó élek színének különböznie kell). Négy szín elegendő, ahogy az ábra mutatja:



- 1047.** A nők által felírt számok összegének egyenlőnek kell lennie a férfiak által felírt számok összegével (hiszen minden tánc pontosan 1-1 nőnél, illetve férfinál szerepel). Mivel a nők esetén az összeg 15, a férfiak esetén pedig 14, ezért biztos, hogy valaki tévedett.
- 1048.** A nők által felírt számok összegének egyenlőnek kell lennie a férfiak által felírt számok összegével (hiszen minden tánc pontosan 1-1 nőnél, illetve férfinál szerepel). Az egyik nem esetén ez az összeg 3-mal osztható lesz, míg a másik nemnél az összeg 3-as maradéka 1 lesz, tehát a két összeg nem lehet egyenlő, ezért biztos, hogy valaki tévedett.
- 1049.** Igen. Legyenek a nők A, B, C , a férfiak pedig D, E betűvel jelölve és tekintsük az alábbi gráfot!

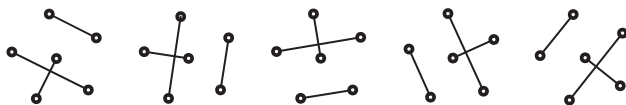


1050.



Az úthálózat szemléltethető egy irányított gráffal. Legyen a „központi település” az a település, amiből a legtöbb kivezető él indul (jelölje K a megfelelő csúcsot)! Bebizonyítjuk, hogy ez megfelelő. Jelölje $N(K)$ a K -ból közvetlenül elérhető csúcsok halmazát! Tekintsük azokat a településeket (ha van ilyen, egyébként a K megfelelő „központi település”-nek), amiket nem tudunk közvetlenül elérni! Megmutatjuk, hogy ezek is elérhetőek a közvetlenül elérhető települések egyikének érintésével. Tegyük fel ugyanis, hogy ez nem lehetséges. Ez azt jelentené, hogy egy ilyen csúcsból az összes $N(K)$ -beli csúcsba és K -ba is odafelé irányított az él, ami ellentmond K választásának, mivel így ebből a csúcsból legalább eggyel több lenne a kifelé vezető él, mint a K -ból kivezető élek száma. Ez az ellentmondás igazolja az állítást. (Vegyük észre, hogy azt a feltételt, hogy hatsúcsú a gráf, nem használtuk fel, azaz tetszőleges csúcsszám esetén működik a gondolatmenet!)

- 1051.** A csapatokat reprezentálják egy szabályos ötszög csúcsai és az ötszög középpontja! Az első fordulóban a párosítást a következőképpen adjuk meg. A mérkőző párokat az ötszög egyik oldalának és az ötszög azzal párhuzamos átlójának megfelelő élek, továbbá a „kimaradó” csúcsot a középponttal összekötő élek adják. A további fordulókat úgy kapjuk, hogy ezt a párosítást a középpont körül elforgatjuk $k \cdot 72^\circ$ -kal az óramutató járásával megegyező irányban ($k = 1, 2, 3, 4$). Így nyilván egy a feltételeknek megfelelő bajnokságot kapunk.



- 1052.** Az előző feladat megoldását módosítsuk úgy, hogy a csapatok legyenek egy szabályos 15 szög csúcsai és a sokszög középpontja! Az első fordulóban a mérkőző párokat egy rögzített oldalnak és az azzal párhuzamos átlóknak, továbbá a kimaradó csúcsot a középponttal összekötő élnek megfelelő élek adják. Ezt a középpont körül forgatva $k \cdot 24^\circ$ -kal ($k = 1, 2, 3, \dots, 14$) kapjuk a többi fordulót.



10. GRÁFOK – MEGOLDÁSOK

- 1053.** Vizsgáljuk az egyik csúcsát (A) a gráfnak! Belőle 5 él indul, azaz valamelyik színből legalább három. Tegyük fel, hogy ezek piros élek, az A -tól különböző végpontjaik legyenek B, C, D ! Ha ezen három csúcs közt haladó bármelyik él piros, akkor az A -val együtt ők piros háromszöget alkotnak. Ha mind kék, akkor ők együtt kék háromszöget határoznak meg.
- 1054.** Vizsgáljuk az egyik csúcsát (A) a gráfnak! Belőle 16 él indul ki, azaz a skatulyaelv alapján valamelyik színből legalább 6 él lesz. Legyen ez a piros szín, ezen élek A -tól különböző csúcsai legyenek B, C, D, E, F, G ! Ezen hat csúcs közt ha halad piros él, akkor az az él az A -val együtt egy piros háromszöget határoz meg. Ha nincs köztük piros él, az azt jelenti, hogy a B, C, D, E, F, G csúcsok által feszített hatsúcsú teljes gráf éleit a fennmaradó két színnel színezzük, ahol az előző feladat alapján biztosan lesz egyszínű háromszög.



11. Statisztika, valószínűségszámítás – megoldások

11.1. Statisztika

1055. A fizetések átlaga $\frac{257\,000 + 204\,000 + 187\,000 + 165\,000 + 112\,000}{5} = 185\,000$ forint.

1056. Az átlagos évi termés $\frac{35 + 42 + 53 + 21 + 30 + 17}{6} = 33$ tonna volt.

1057. Az átlagos havi fizetés: $\frac{340\,000 \cdot 3 + 245\,000 \cdot 9 + 151\,000 \cdot 32}{3 + 9 + 32} \approx 183\,113,6$ forint.

1058. Mivel a január 31 napos hónap, így Zoli naponta átlagosan $\frac{3 \cdot 17 + 8 \cdot 12 + 7 \cdot 9 + (31 - 3 - 8 - 7) \cdot 0}{31} \approx 6,77$ órát dolgozott.

1059. Ha az utolsó napon x órát tanul, akkor a napi átlag: $\frac{4 \cdot 0 + 5 \cdot 7 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 10 + x}{14} = 6$, ebből $x = 33$, azaz nem tudja teljesíteni a tervet.

1060. A 27 darab dolgozat érdemjegyeit sorba rendezve a középső elem a 14. lesz a sorban, ami 3-as. Így a medián 3.

1061. A 28 darab dolgozat érdemjegyeit sorba rendezve, a két középső elem a 14. és a 15. Ezek egyike 2-es, a másik egy 3-as dolgozat. Azaz a medián a kettő átlaga: 2,5.

1062. A módusz a maximális gyakoriságú elem, azaz a 17.

1063. A módusz a maximális gyakoriságú elem/elemek, azaz jelen esetben a móduszok halmaza a $\{2, 7\}$ halmaz.

1064. A módusz a maximális gyakoriságú elem/elemek, azaz jelen esetben a móduszok halmaza a $\{5, 6, 9\}$ halmaz.



11. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS – MEGOLDÁSOK

1065. Az adatok átlaga: $\bar{x} = 4,5$. A szórádefiníció szerint:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (2 - 4,5)^2 + (4 - 4,5)^2 + 3 \cdot (5 - 4,5)^2 + (6 - 4,5)^2 + (7 - 4,5)^2}{8}} = 1,658.$$

1066. $\sigma = 14,11$ cm.

1067. $\sigma = 14,33$ kg.

1068. $\sigma = \sqrt{0,2 \cdot (4 - 6,7)^2 + 0,3 \cdot (6 - 6,7)^2 + 0,45 \cdot (8 - 6,7)^2 + 0,05 \cdot (10 - 6,7)^2} = 1,71$ óra.

1069.

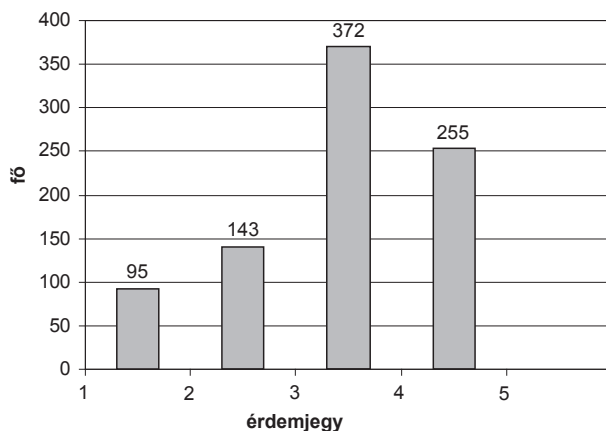
$$\begin{aligned} \sigma &= \\ &= \sqrt{0,1 \cdot (110 - 165,5)^2 + 0,15 \cdot (130 - 165,5)^2 + 0,2 \cdot (160 - 165,5)^2 + 0,35 \cdot (180 - 165,5)^2 + 0,2 \cdot (200 - 165,5)^2} = \\ &= 28,54 \text{ cm.} \end{aligned}$$

1070. Olyan adathalmaz kell, ahol az adatok átlagtól (azaz a 4-től) való eltérések a négyzetösszege 8, ilyen adathalmaz például: 2, 4, 4, 6.

1071. Egy megfelelő adathalmaz például: 6, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 14.

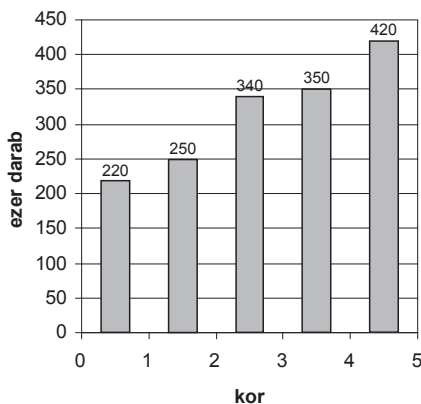
1072. Egy megfelelő adathalmaz például: 0, 0, 5, 10, 15.

1073.



11. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS – MEGOLDÁSOK

1074. Diagramunk vízszintes tengelyén az autók életkorának (években) felső egészrészét ábrázoljuk. (x felső egészrésze a nála nem kisebb legkisebb egész szám)



1075. A piacvezető cég birtokolja a piac $\frac{112}{360}$ -ad részét, azaz 31,11% a részesedésük.

1076. A középponti szögekre $x - 12^\circ + x + x + 12^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 120^\circ$, azaz a középponti szögek rendre 108° ; 120° ; 132° ; így a két nagyobb cég együttes részesedése: $\frac{120^\circ + 132^\circ}{360^\circ} = 0,7$, azaz 70%.

1077. Az egyes évfolyamokhoz tartozó köríkek középponti szögei:

$$1. \text{ évfolyam: } \frac{210}{210 + 232 + 195 + 183} \cdot 360^\circ = 92,2^\circ.$$

$$2. \text{ évfolyam: } \frac{232}{210 + 232 + 195 + 183} \cdot 360^\circ = 101,85^\circ.$$

$$3. \text{ évfolyam: } \frac{195}{210 + 232 + 195 + 183} \cdot 360^\circ = 85,61^\circ.$$

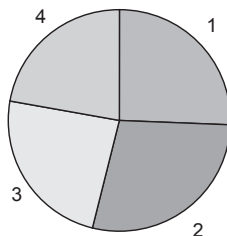
$$4. \text{ évfolyam: } \frac{183}{210 + 232 + 195 + 183} \cdot 360^\circ = 80,34^\circ.$$

Azaz a kördiagram:



11. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS – MEGOLDÁSOK

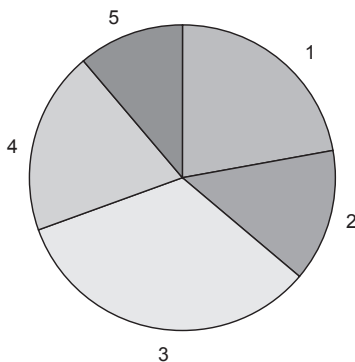
Évfolyamok létszáma



- 1078.** Az osztálylétszám 36. Így az egyes körcikkek középponti szögei rendre:
 $\frac{8}{36} \cdot 360^\circ = 80^\circ$; $\frac{5}{36} \cdot 360^\circ = 50^\circ$; $\frac{12}{36} \cdot 360^\circ = 120^\circ$; $\frac{7}{36} \cdot 360^\circ = 70^\circ$; $\frac{4}{36} \cdot 360^\circ = 40^\circ$.

A kördiagram:

Dolgozatok érdemjegyei



- 1079.** Az átlag definíciója miatt a fiúk magasságainak összege $170 \cdot 10 = 1700$ cm, a lányok magasságainak összege pedig $160 \cdot 20 = 3200$ cm, így a tanulók átlagmagassága: $\frac{1700 + 3200}{30} = 163,3$ cm.
- 1080.** Az átlag definíciója miatt a játékosok életkorának összege a kiállítás előtt $7 \cdot 22 = 154$ év, a kiállítást követően pedig $6 \cdot 21 = 126$ év. A kiállított játékos ezért $154 - 126 = 28$ éves.
- 1081.** A gyerekek magasságának összege az első esetben $30 \cdot 147 = 4410$ cm, a második esetben pedig $30 \cdot 147,5 = 4425$ cm. Az eltérés abból származik, hogy Béla 15 cm-rel magasabb Andrásnál.



11. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS – MEGOLDÁSOK

1082. Jelölje x a tanárnők számát, y pedig a tanár urak számát! Ekkor életkoruk összege $35x$, illetve $50y$, ezért a testület átlagéletkora: $\frac{35x + 50y}{x + y} = 40$. Innen

$$35x + 50y = 40x + 40y, \text{ amiből } 10y = 5x; \text{ ezért } x : y = 2 : 1.$$

1083. Tegyük fel, hogy x a gyerekek száma. Ekkor a családtagok életkorának összegére: $20(x + 2) = 16(x + 1) + 44$. Ennek megoldása: $x = 5$, tehát 5 gyerek van a családban.

1084. Jelölje x az 5-ös, y a 4-es, z a 3-as, v pedig a 2-es dolgozatok számát! Az osztályzatok összege az átlag és az osztálylétszám szorzata, így $5x + 4y + 3z + 2v = 24 \cdot 3,25 = 78$. Mivel $x + y + z + v = 24$, ezért $3x + 2y + z = 30$.

a) Ha pl. $x = z = 0$ és $y = 15$, $v = 9$, akkor minden összefüggés teljesül, tehát lehetséges, hogy nem született jeles dolgozat.

b) Az utolsó egyenletből világos, hogy x értéke legfeljebb 10 lehet. Ez meg is valósul, ha $y = z = 0$ és $v = 14$. Tehát legfeljebb 10 jeles dolgozat lehetett.

1085. a) Jelölje x az 5-ös, y pedig a 4-es osztályzatok számát! Ekkor $4x$ darab 3-as és $2y$ darab 2-es dolgozatot írtak a diákok. A jegyek összege az átlag definíciója miatt $25 \cdot 4,96 = 74$. Így felírható az alábbi egyenlet: $5x + 4y + 12x + 4y = 74$.

Innen $17x + 8y = 74$. Az x lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3, 4. Mivel az ismeretlenek pozitív egészek, ezért ezeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy csakis $x = 2$ felel meg, ekkor $y = 5$. Tehát 2 darab 5-ös, 5 darab 4-es, 8 darab 3-as és 10 darab 2-es osztályzat született.

b) A legtöbb dolgozat 2-es lett, ezért a módusz (a mintában szereplő maximális gyakoriságú adat) értéke 2.

c) A nagyság szerint sorba rakott adatok között a nagyság szerint középső a 3, így ennyi a minta mediánja.

1086. Mivel a fizikából ismert, hogy $t = \frac{s}{v}$, ahol s az út, v az átlagsebesség és t az eltelt idő, ezért, ha v az autós által elérhető maximális átlagsebesség, akkor

$$\begin{aligned} \frac{s}{v} &= \frac{\frac{4}{5}s}{90} + \frac{\frac{1}{5}s}{50}; \\ \frac{1}{v} &= \frac{2}{225} + \frac{1}{250} = \frac{29}{2250}; \\ v &= \frac{2250}{29} = 77\frac{17}{29} \approx 77,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \end{aligned}$$



11. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS – MEGOLDÁSOK

- 1087.** Jelölje az A osztályba járó fiúk, illetve lányok számát x , illetve y , a B osztályba járó fiúk és lányok számát pedig z és v ! A feladat szövege és az átlagszámítás képlete alapján az alábbi egyenletek írhatók fel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{40,5x + 45y}{x + y} &= 42 \\ \frac{35,5z + 38v}{z + v} &= 37 \\ \frac{40,5x + 35,5z}{x + z} &= 39,5 \end{aligned} \right\}$$

A feladat kérdése az, hogy mennyi a $\frac{45y + 38v}{y + v}$ hányados értéke.

A felírt egyenletekből rendezés után az alábbi összefüggések adódnak:

$$3y = 1,5x, \text{ ebből } y = 0,5x;$$

$$v = 1,5z;$$

$$x = 4z.$$

Behelyettesítve:
$$\frac{45y + 38v}{y + v} = \frac{45 \cdot 0,5 \cdot 4z + 38 \cdot 1,5z}{0,5 \cdot 4z + 1,5z} = \frac{147z}{3,5z} = 42.$$

Tehát a két osztályba járó összes lányra vonatkozó átlagpontszám 42.

- 1088.** a) Összeadva a napi adatokat: 1984.

b) Az átlag: $\frac{1984}{7} \approx 283.$

c) Szombaton és vasárnap összesen 558 baleset történt, ami $\frac{558}{1984} \cdot 100 \approx 28\%.$

1089. a) Az átlag: $\frac{86 + 82 + 73 + 65 + 68 + 70 + 72}{7} \approx 74 \text{ cm}.$

b) A terjedelem: $86 - 65 = 21 \text{ cm}.$

c) A medián: 72 cm.

d) Hétfőn, kedden, szerdán és vasárnap.

1090. a) Az átlag: $\frac{5 + 5 + 12 + 6 + 7 + 8 + 40 + 23}{8} = 13,25.$

b) Az átlagtól való átlagos abszolút eltérés:

$$\frac{|5 - 13,25| + |5 - 13,25| + |12 - 13,25| + |6 - 13,25| + |7 - 13,25| + |8 - 13,25| + |40 - 13,25| + |23 - 13,25|}{8} =$$

$$= 9,125.$$



11. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS – MEGOLDÁSOK

1091. a) Az átlag: $\frac{5+5+12+6+7+8+40+23}{8} = 13,25$.

b) Az átlagtól vett átlagos négyzetes eltérés:

$$\frac{(5-13,25)^2 + (5-13,25)^2 + (12-13,25)^2 + (6-13,25)^2 + (7-13,25)^2 + (8-13,25)^2 + (40-13,25)^2 + (23-13,25)^2}{8} \approx$$

$\approx 133,44$.

1092. a) Az átlagos ár: $\frac{1200+1100+1400+1400+1500}{5} = 1320$ forint.

b) Az árnövekedés: $\frac{1500-1200}{1200} \cdot 100 = 25\%$ -os.

c) $\frac{1500-1100}{1100} \cdot 100 \approx 36\%$.

1093. a) Az átlag: $\frac{456+475+470+448+431+402+400+404}{8} = 435,75$ (≈ 436).

b) A medián: $\frac{431+448}{2} = 439,5$.

A szórás:

$$\sqrt{\frac{20,25^2 + 39,25^2 + 34,25^2 + 12,25^2 + 4,75^2 + 33,75^2 + 35,75^2 + 31,75^2}{8}} \approx 29.$$

c) $\frac{404-475}{475} \cdot 100 \approx -15\%$, tehát 15%-os a csökkenés.

1094. a) $6600 \cdot \frac{45}{360} = 825$; 825; 1650; $6600 \cdot \frac{60}{360} = 1100$; 2200.

b) $\frac{1}{8} \cdot 100 = 12,5\%$; 12,5%; 25%; $\frac{1}{6} \cdot 100 \approx 16,67\%$; 33,33%.

c) Az átlag: $\frac{6600}{5} = 1320$.

d) Összesen $6600 + 100 = 6700$ szavazó volt, ez a 80%, így $\frac{6700}{80} \cdot 100 = 8375$ választópolgár él a településen.

1095. a) Az átlag: $\frac{43+48+44+46+45}{5} = 45,2$.

b) Az adatokat nagyság szerint növekvő sorrendbe rendezve: 43, 44, 45, 46, 48.
A medián a középső adat, tehát 45.



11. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS – MEGOLDÁSOK

c) A szórás:

$$\sqrt{\frac{(43-45,2)^2 + (44-45,2)^2 + (45-45,2)^2 + (46-45,2)^2 + (48-45,2)^2}{5}} \approx 1,72.$$

1096. a) Az átlag: $\frac{44+70+84+60+66+80+94+56}{8} = 69,25.$

b) Nagyság szerint növekvő sorrendbe rendezve az adatokat: 44, 56, 60, 66, 70, 80, 84, 94. A medián az így felírt adatsor két középső számának számtani közepe:

$$\frac{66+70}{2} = 68.$$

c) A szórás:

$$\sqrt{\frac{(44-69,25)^2 + (70-69,25)^2 + (84-69,25)^2 + (60-69,25)^2 + (66-69,25)^2 + (80-69,25)^2 + (94-69,25)^2 + (56-69,25)^2}{8}} \approx 15,23.$$

1097. a) Az átlag: $\frac{56+24+90+75+93+46+68+80+90+96}{10} = 71,8.$

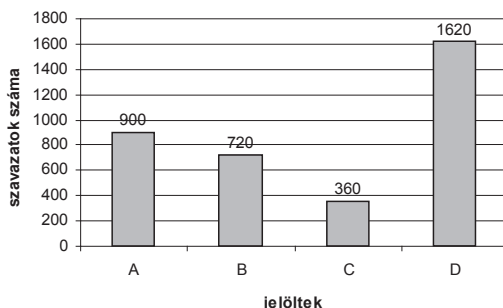
b) Nagyság szerint nemcsökkenő sorrendbe rendezve az adatokat: 24, 46, 56, 68, 75, 80, 90, 90, 93, 96, ezért a medián: $\frac{75+80}{2} = 77,5.$

c) A szórás:

$$\sqrt{\frac{15,8^2 + 47,8^2 + 18,2^2 + 3,2^2 + 21,2^2 + 25,8^2 + 3,8^2 + 8,2^2 + 18,2^2 + 24,2^2}{10}} \approx 22,34.$$

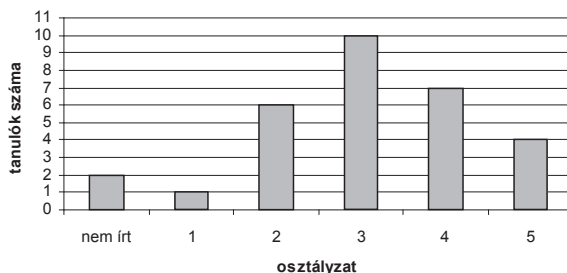
1098. a) A százalékszámítást elvégezve: A: 900, B: 720, C: 360, D: 1620.

b)



11. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS – MEGOLDÁSOK

1099. a)



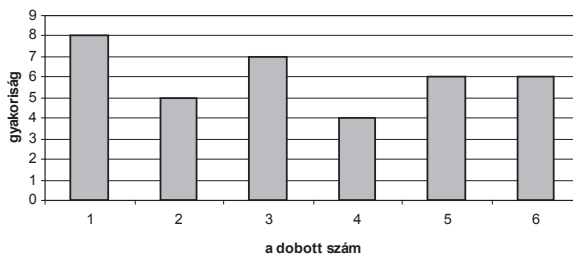
b) Az átlag kiszámítási képletét alkalmazva, a dolgozat osztályátalaga:

$$\frac{1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{28} = 3,25.$$

A medián: 3.

A módusz: 3.

1100.



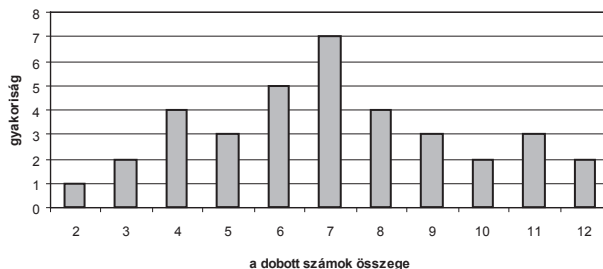
b) A relatív gyakoriság definíciója szerint: 1-es: $\frac{8}{36} \approx 0,22$; 2-es: $\frac{5}{36} \approx 0,14$; 3-as:

$$\frac{7}{36} \approx 0,19; 4-es: \frac{4}{36} \approx 0,11; 5-ös és 6-os: \frac{6}{36} \approx 0,17.$$

c) A módusz: 1.

A medián: 3.

1101. a)



b) A relatív gyakoriság definíciója szerint:



11. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS – MEGOLDÁSOK

$$2: \frac{1}{36} \approx 0,03; 3: \frac{2}{36} \approx 0,06; 4: \frac{4}{36} \approx 0,11; 5: \frac{3}{36} \approx 0,08; 6: \frac{5}{36} \approx 0,14;$$

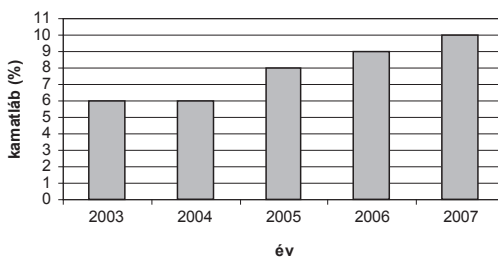
$$7: \frac{7}{36} \approx 0,19; 8: \frac{4}{36} \approx 0,11; 9: \frac{3}{36} \approx 0,08; 10: \frac{2}{36} \approx 0,06; 11: \frac{3}{36} \approx 0,08;$$

$$12: \frac{2}{36} \approx 0,06.$$

- c) A módusz: 7.
A medián: 7.

- 1102.** a) Legyenek a számok pl. 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, ekkor a módusz, a medián és az átlag is 3.
b) Legyenek a számok pl. 2, 4, 4, 4, 4, 4, 10, 10, 10, 10, ekkor a medián 4, az átlag pedig 6,2.
c) Legyenek a számok pl. 2, 4, 4, 4, 4, 10, 10, 10, 10, 10, ekkor a medián 7, az átlag pedig 6,8.

1103. a)



b) Az átlag: $\frac{6+6+8+9+10}{5} = 7,8.$

Tehát 7,8% az 5 évre vonatkozó átlagos kamatláb.

c) A szórás: $\sqrt{\frac{2 \cdot (6-7,8)^2 + (8-7,8)^2 + (9-7,8)^2 + (10-7,8)^2}{5}} = 1,6\%.$

1104. a) Az átlagos évi növekedés: $\frac{1020-824}{20} = 9,8.$

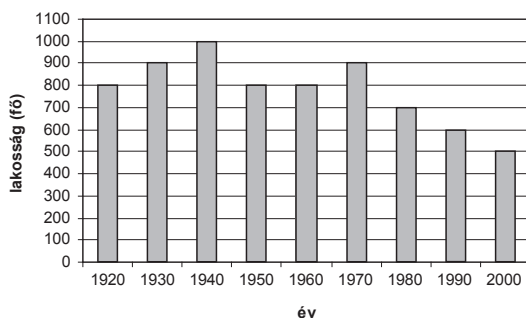
b) Az átlagos éves csökkenés: $\frac{865-492}{30} \approx 12,4.$

c)

év	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
lakosság (fő)	800	900	1000	800	800	900	700	600	500



11. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS – MEGOLDÁSOK



1105. a) Az osztályba 14 fiú jár, így az átlag:

$$\frac{39 + 2 \cdot 40 + 3 \cdot 41 + 4 \cdot 42 + 2 \cdot 43 + 44 + 45}{14} \approx 41,8.$$

b) Az osztályba 11 lány jár, így az átlag: $\frac{36 + 37 + 2 \cdot 38 + 4 \cdot 39 + 2 \cdot 40 + 41}{11} \approx 38,7.$

c) Az átlag: $\frac{36 + 37 + 2 \cdot 38 + 5 \cdot 39 + 4 \cdot 40 + 4 \cdot 41 + 4 \cdot 42 + 2 \cdot 43 + 44 + 45}{25} = 40,44.$

d) A módusz: 39. A medián: 40.

1106. a) A lányok jegyeinek átlaga: $\frac{4 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1}{15} = \frac{52}{15} \approx 3,47.$

b) A fiúk jegyeinek átlaga: $\frac{3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 + 1}{10} = \frac{36}{10} = \frac{18}{5} = 3,6.$

c) Az osztályátlag: $\frac{7 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 2}{25} = \frac{88}{25} = 3,52.$

d) Nem igaz, hiszen $\frac{52}{15} + \frac{18}{5} = \frac{106}{15} = \frac{530}{75} \neq 2 \cdot \frac{88}{25} = \frac{528}{75}.$

e) A közepesnél rosszabb dolgozatok száma 6, így 19 gyerek írt legalább 3-ast, ami a tanulók számának 76%-a.

1107. a) A súlyozott átlag: $\frac{5 + 4 + 4 + 4 + 2 \cdot (2 + 5 + 3 + 3)}{4 + 4 \cdot 2} \approx 3,58;$ ezért Feri 3-as lesz fizikából.

b) A jegyek számtani közepe: $\frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2}{8} = 3,75.$

c) A módusz: 4. A medián: $\frac{4 + 4}{2} = 4.$



11. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS – MEGOLDÁSOK

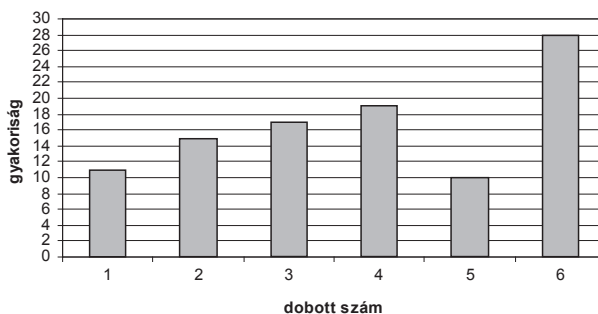
1108. a) A súlyozott átlag: $\frac{4+5+3+5+1,5(4+2+3)+2(3+4+3+4+2)}{4+3 \cdot 1,5+5 \cdot 2} \approx 3,38$; ezért

Éva 3-ast kap majd év végén.

b) A számtani közép: $\frac{2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{12} = 3,5$.

c) A móduszalmaz: $\{4, 3\}$. A medián: $\frac{3+4}{2} = 3,5$.

1109. a)



b) A módusz: 6.

c) Az átlag: $\frac{11 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 17 \cdot 3 + 19 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 28 \cdot 6}{100} = 3,86$.

d) A medián: 4.

e) A szórás:

$$\sqrt{\frac{11 \cdot (1-3,86)^2 + 15 \cdot (2-3,86)^2 + 17 \cdot (3-3,86)^2 + 19 \cdot (4-3,86)^2 + 10 \cdot (5-3,86)^2 + 28 \cdot (6-3,86)^2}{100}} = 1,72.$$

1110. a) Az átlag: $\frac{3 \cdot 72 + 4 \cdot 76 + 120 + 200 + 480}{10} = 132$ ezer forint.

b) A módusz: 76 ezer forint.

c) A medián: $\frac{76+76}{2} = 76$ ezer forint.

d) A szórás:

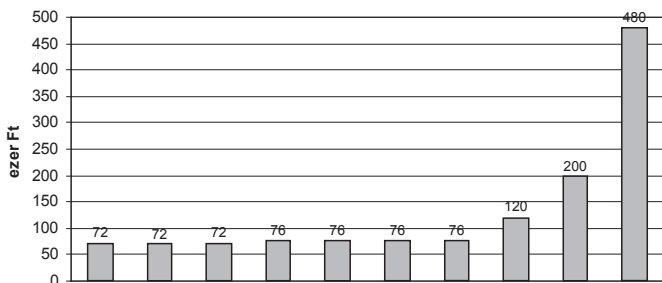
$$\sqrt{\frac{3 \cdot (72-132)^2 + 4 \cdot (76-132)^2 + (120-132)^2 + (200-132)^2 + (480-132)^2}{10}} \approx 122$$

ezer forint.



11. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS – MEGOLDÁSOK

e)



1111. a) Összeadva a napi nézőszámokat: 4515.

b) Az átlag: $\frac{4515}{7} = 645$.

c) A szórás:

$$\sqrt{\frac{(424-645)^2 + (473-645)^2 + (457-645)^2 + (546-645)^2 + (812-645)^2 + (943-645)^2 + (860-645)^2}{7}} \approx 202,3.$$

d) Szombaton és vasárnap összesen 1803 néző volt, ami a heti nézőszám 40%-a.

1112. Mivel az átlag:

$$\frac{1+2+\dots+n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2},$$

továbbá

$$\left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 = k^2 - (n+1)k + \frac{(n+1)^2}{4},$$

ezért:

$$\begin{aligned} nD^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 - (n+1) \sum_{k=1}^n k + \frac{n(n+1)^2}{4} = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (n+1) \frac{n(n+1)}{2} + n \frac{(n+1)^2}{4}, \end{aligned}$$

miközben ismert összegképleteket használtunk fel.

Innen:

$$D^2 = \frac{n+1}{12} (4n+2-6n-6+3n+3) = \frac{1}{12} (n^2-1).$$

1113. Jelölje a számsokaságot alkotó számokat $x_1, x_2, \dots, x_n$, a mediánt M , a szórást pedig D ! A feladatban szereplő állítás:



11. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS – MEGOLDÁSOK

$$\left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - M \right| \leq D.$$

A bal oldalt átalakítva, majd alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$\frac{|x_1 - M + x_2 - M + \dots + x_n - M|}{n} \leq \frac{|x_1 - M| + |x_2 - M| + \dots + |x_n - M|}{n}.$$

Ismeretes az elméletből, hogy az $f(x) = |x_1 - x| + |x_2 - x| + \dots + |x_n - x|$ ún. abszolút eltérések összege függvény pontosan akkor minimális, ha $x = M$. Ha $\bar{x}$ jelöli az átlagot, akkor a fentebb elmondottak miatt

$$|\bar{x} - M| \leq \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}.$$

Alkalmazva a számtani, valamint a négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget, adódik, hogy

$$|\bar{x} - M| \leq \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n} \leq \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = D;$$

ami éppen a feladat állítása!

11.2. Valószínűesszámítás

1114. A 14 lány közül 11 nem szőke, így a kérdezett valószínűség: $P = \frac{11}{14} \approx 0,786$.

1115. A komplementer esemény valószínűségét számoljuk, azaz annak az eseménynek a valószínűségét, hogy a lányok haja azonos színű:

$$P(\bar{A}) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{6}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{24}{91};$$

azaz $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{67}{91} \approx 0,736$ annak a valószínűsége, hogy különböző lesz a kiválasztottak hajának színe.

1116. A kísérletnek összesen $6 \cdot 6 = 36$ különböző kimenetele lehetséges. A kedvező esetek száma pedig 4 ($5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1$). Azaz a kérdezett valószínűség:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$



11. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS – MEGOLDÁSOK

- 1117.** A kísérletnek összesen $6 \cdot 6 = 36$ különböző kimenetele lehetséges. A kedvező esetek száma pedig $6 \cdot (1+1, 1+2, 2+1, 1+3, 2+2, 3+1)$. A kért valószínűség:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

- 1118.** Az összes lehetséges dobássorozatok száma 6^3 . A háromtényezős szorzat pontosan akkor lesz 32-vel osztható, ha a) mindhárom dobás 4-es, vagy b) két dobás 4-es és egy dobás 2-es, vagy c) két dobás 4-es és egy dobás 6-os. Az a) esemény egyféleképpen következhet be. A b) esemény háromféleképpen a szerint, hogy melyik kockával dobtuk a 2-est. A c) esemény is háromféleképpen a szerint, hogy melyik kockával dobtuk a 6-ost. A kedvező dobássorozatok száma tehát 7, így a kért valószínűség: $P = \frac{7}{6^3} \approx 0,032$.

- 1119.** Elég azt vizsgálni, hogy egy körön belül kinek mekkora esélye van a pont megszerzésére.

Gyurinak erre az esélye: $P_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Zolinak pedig: $P_2 = \frac{2}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$;

ahol az egyes összeadandó tagok rendre azon páronként kizáró események valószínűségei, hogy 3, 6, 9, 12 Zolinál az összeg. Azaz Gyurinak nagyobb az esélye a győzelemre.

- 1120.** A kedvező esetek száma: $\binom{7}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} = 8820$.

Az összes lehetséges húzások száma pedig: $\binom{21}{6} = 54\,264$.

Azaz az esemény valószínűsége: $P(A) = \frac{8820}{54\,264} = \frac{105}{646} \approx 0,16$.

- 1121.** Az esemény a következő három módon következhet be:

3 piros és 2 kék golyót húzunk, 4 piros és 1 kék golyót húzunk, vagy ha minden húzás piros eredményt ad.

Az első eset $\binom{5}{3} \cdot 7^3 \cdot 9^2$ különböző módon valósulhat meg, mivel $\binom{5}{3}$ különböző

módon választhatjuk ki, hogy melyik 3 húzás legyen a piros, majd ezeken a helyeken minden esetben 7, míg a másik két húzásnál 9-9 golyóból választunk.

Hasonlóképpen a második eset $\binom{5}{4} \cdot 7^4 \cdot 9^1$ különböző módon valósulhat meg, míg a harmadik 7^5 különböző módon.



11. STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS – MEGOLDÁSOK

Az összes lehetséges húzás száma 16^5 , mivel minden húzásnál 16 golyó közül húzunk. Így a kért valószínűség:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{3} \cdot 7^3 \cdot 9^2 + \binom{5}{4} \cdot 7^4 \cdot 9^1 + 7^5}{16^5} \approx 0,384.$$

- 1122.** A 40-nél kisebb pozitív prímek: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, azaz összesen 12 darab szám. A lehetséges húzások száma: 39^4 . A kedvező esetek száma pedig: 12^4 .

Így a kért valószínűség: $\frac{12^4}{39^4} \approx 0,009$.



1. Ismétlés	3
1.1. Műveletek racionális számokkal	3
1.2. A százalékszámításról	3
2. Halmazelmélet	6
2.1. Bevezetés a halmazelméletbe	6
3. Algebra	18
3.1. Hatványozás egész kitevővel	18
3.2. Betűs kifejezések	21
3.3. Algebrai tört kifejezések	31
3.4. Négyzetgyökvonás	35
4. Számelmélet	41
4.1. Bevezetés a számelméletbe	41
4.2. Számrendszerek	50
5. Függvények	53
5.1. Bevezetés a függvénytanba	53
5.2. A függvények ábrázolása, jellemzése	58
6. Egyenletek	86
6.1. Egyenletek grafikus megoldása	86
6.2. Az egyenletekről	93
6.3. Törtös egyenletek	95
6.4. Szöveges feladatok	96
6.5. Másodfokú egyenletek	103
6.6. Négyzetgyökös egyenletek	114
6.7. Abszolút értékes egyenletek	115
6.8. Az egyenlőtlenségekről	116
6.9. Az ekvivalens (egyenértékű) átalakításokról	119
6.10. Egyenletrendszerek	123
7. Geometria	130
7.1. A háromszög szögeire, oldalaira vonatkozó tételek	130
7.2. A háromszög nevezetes vonalai és pontjai	133
7.3. A háromszög területszámítási módjai	138
7.4. A speciális négyszögek fajtái	142
7.5. Konvex sokszögek	146
7.6. A kör és részei	147
7.7. Látószög	153
7.8. Húrnégyszögek, érintőnégyszögek	154
7.9. Geometriai transzformációk	156
7.10. Hasonlóság	160
7.11. Vektorok	170
7.12. Trigonometria	172
8. Gondolkodási módszerek	182
8.1. Skatulyaelv, logika	182
9. Kombinatorika	188
9.1. Kombinatorikai problémák	188
10. Gráfok	202
10.1. Gráfelmélet	202
11. Statisztika, valószínűségszámítás	212
11.1. Statisztika	212
11.2. Valószínűségszámítás	225