

1. FELADATSOR

I. RÉSZ

1. Mely x valós számokra lesz ebben a sorrendben a $\cos x$, a $\sqrt{2} \sin x$ és a $\operatorname{tg} x$ egy mértani sorozat három egymást követő tagja? (11 PONT)



11 PONT

2. Egy rombusz egyik átlója 20 cm, beírható körének sugara 6 cm.

a) Határozza meg a rombusz területét! (9 PONT)

b) Határozza meg a rombusz hegyesszögeinek nagyságát! (3 PONT)



12 PONT

3.

a) Határozza meg annak a valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvénynek a hozzárendelési szabályát, amely az 1 helyen a 0, a 3 helyen a 26, a -2 helyen a -9 értéket veszi fel! (11 PONT)

b) Határozza meg a fenti függvény 3 és -2 abszcisszájú pontjain áthaladó szelő egyenletét! (3 PONT)



14 PONT

4. Egy országban a telefonszámok ötjegyű pozitív egész számok. Azokat a telefonszámokat, melyek csupa különböző számjegyből állnak, nem adják ki, állami célra tartják fenn őket.

a) Hány állami telefonszám lehetséges? (5 PONT)

b) Hány olyan telefonszám lehetséges, amelyben a számjegyek szorzata páros?
..... (3 PONT)

c) Hány olyan telefonszám lehetséges, amelyben pontosan egy számjegy fordul elő pontosan kétszer? (6 PONT)



14 PONT

II. RÉSZ

5. Egy cég olyan tömör, csonka kúp alakú macskatálakat készít, melyeket fölülről egy olyan félgömbbel mélyítették ki, melynek főköre egybeesik a csonka kúp fedőkörével. A fedőkör sugara 12 cm. A macskatál magassága 13 cm. Az alkotók az alaplap síkjával 70° -os szöget zárnak be.

a) Határozza meg a macskatál elkészítéséhez szükséges anyag térfogatát és a macskatál felszínét! (13 PONT)

b) Nagytestű macskák számára ugyanez a cég kétszer ekkora térfogatú (a kicsihez hasonló) tálal is készít. Mekkora a csonka kúp fedőkörének sugara a nagytestű macskáknak készült tál esetén? (3 PONT)



16 PONT

6. Egy szabályos pénzérmét 10-szer feldobtunk. Adja meg az alábbi események valószínűségét!

a) A: Több fejet dobtunk, mint írást. (4 PONT)

b) B: Legalább annyi írást dobtunk, mint fejet. (3 PONT)

c) C: A dobott fej-írás sorozat tengelyesen szimmetrikus (palindrom), azaz az első dobás eredménye ugyanaz, mint az utolsóé, a második dobás eredménye ugyanaz, mint az utolsó előtti dobásé és így tovább, az 5. dobás eredménye ugyanaz, mint a 6. dobásé. (3 PONT)

d) D: A dobott fejek és írások száma is prímszám. (6 PONT)



16 PONT

7. Tekintsük a következő, a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett függvényt!

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x + 2}$$

a) Ábrázolja az $f(x)$ függvényt! (5 PONT)

b) Adja meg az $f(x)$ derivált függvényét! (4 PONT)

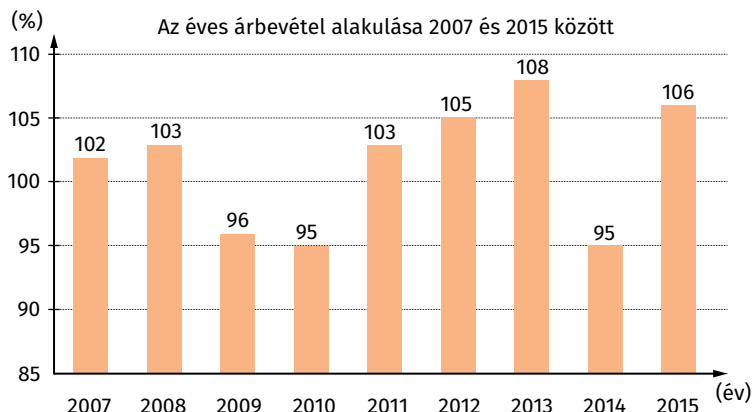
c) A p valós paraméter értékétől függően hány valós megoldása van a következő egyenletnek?

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x + 2} = p \quad \dots\dots\dots (7 \text{ PONT})$$



16 PONT

8. Egy cég 2007 és 2015 közötti nettó árbevételének alakulását a következő oszlopdiagram mutatja.



Az oszlopdiagramon ábrázolt százalékos értékek az előző évhez viszonyított változást jelentik. (Pl.: a 2011-es év 103%-os értéke azt jelenti, hogy a 2011-es árbevétel a 2010-es árbevétel 103%-a.) A 2010-es árbevétel 8 millió forint volt.

- Mekkora volt az árbevétel 2015-ben? Válaszát 1000 forintra kerekítve adja meg! (3 PONT)
- Mekkora volt az árbevétel 2006-ban? Válaszát 1000 forintra kerekítve adja meg! (4 PONT)
- Hány forint volt az átlagos nettó árbevétel-változás 2006 és 2015 között? (3 PONT)
- Készítsen az utolsó 5 év nettó árbevétel-változásáról olyan oszlopdiagramot, amelyen a feltüntetett értékek a 2010. évhez képest számolt százalékos nettó árbevétel-változást mutatják! (6 PONT)



16 PONT

9. Egy kisvárosi zeneiskolában három hangszeren tanulnak a diákok. Zongorázni 32-en, klarinétozni 17-en, és furulyázni is 32-en tanulnak. Zongorázni és klarinétozni 9-en, klarinétozni és furulyázni 12-en tanulnak. Pontosan két hangszerrel háromszor annyian ismerkednek, mint három hangszerrel.

- Hányan tanulnak zongorázni, de klarinétozni nem? (8 PONT)
- Mennyivel vannak többen azok, akik nem furulyáznak, mint azok, akik csak furulyán tanulnak? (3 PONT)
- Hány olyan diák van, aki klarinétozik vagy zongorázik? (3 PONT)
- Lehet-e a zeneiskolában tanuló diákok száma öttel osztható? (2 PONT)



16 PONT

1. FELADATSOR

1.

Mivel a három kifejezés mértani sorozatot alkot,

$$\left(\sqrt{2} \sin x\right)^2 = \cos x \cdot \operatorname{tg} x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

$$2 \sin^2 x = \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

2 PONT

$$2 \sin^2 x = \sin x$$

1 PONT

$$\sin x (2 \sin x - 1) = 0$$

1 PONT

$$\sin x = 0 \text{ vagy } \sin x = \frac{1}{2}$$

2 PONT

A $\sin x = 0$ -hoz nem tartozik megoldás, mert ekkor mind a három tagnak 0-nak kellene lennie, és $\cos x \neq 0$.

2 PONT

$$\sin x = \frac{1}{2}, \text{ azaz } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

1 PONT

$$\text{vagy } x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}$$

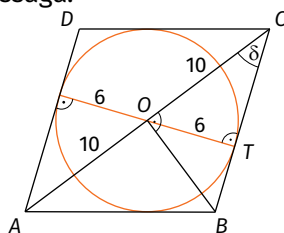
1 PONT

Összesen:

11 PONT

2.

a) Helyes ábra készítése az adatok feltüntetésével, melyről kiderül, hogy a beírható kör sugara az OBC háromszög magassága és/vagy a beírható kör átérője a rombusz magassága.



1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

Az OTC derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétel szerint

$$CT = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (cm)}.$$

1 PONT

Az OBC derékszögű háromszögből a magasságtétel szerint

$$6 = \sqrt{TB \cdot 8},$$

1 PONT

$$TB = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} \text{ (cm)},$$

1 PONT

$$a = BT + TC = 12,5 \text{ (cm)}.$$

1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

1. megoldás

Az OBC derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétel szerint

1 PONT

$$OB = \sqrt{12,5^2 - 10^2},$$

$$OB = 7,5 \text{ (cm)}.$$

1 PONT

$$T = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

A rombusz területe: 150 cm^2 .

1 PONT

2. megoldás

$$T_{\text{rombusz}} = 4T_{OBC\Delta}$$

(1 PONT)

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

$$T_{OBC\Delta} = \frac{BC \cdot OT}{2}$$

(1 PONT)

$$T_{OBC\Delta} = \frac{12,5 \cdot 6}{2} = 37,5 \text{ (cm}^2\text{)}$$

(1 PONT)

A rombusz területe: 150 cm^2 .

(1 PONT)

Összesen:

9 PONT

b) Az OTC derékszögű háromszögben: $\sin \delta = \frac{6}{10}$.

1 PONT

$$\delta \approx 36,87^\circ.$$

1 PONT

A keresett szög: $73,74^\circ$.

1 PONT

Összesen:**3 PONT****3.****a)** A másodfokú függvény hozzárendelési szabályának általános alakja:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}).$$

1 PONT

*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*A feladat szövegéből adódóan: $f(1) = 0$; $f(3) = 26$; $f(-2) = -9$.

1 PONT

Az 1, 3, -2 értékeket a függvény hozzárendelési szabályába beírva, és a kapott kifejezéseket az adott helyen felvett értékkel egyenlővé téve az

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 26 \\ 4a - 2b + c = -9 \end{cases}$$

3 PONT

egyenletrendszert kapjuk.

Innen $a = 2$, $b = 5$, $c = -7$.

5 PONT

A keresett függvény hozzárendelési szabálya: $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$.

1 PONT

Összesen:**11 PONT****b)** Az $A(3; 26)$ és $B(-2; -9)$ pontokon átmenő egyenes egy irányvektora az $\overrightarrow{AB}$.

1 PONT

$$\overrightarrow{AB}(-5; -35).$$

1 PONT

A szelő egyenlete: $-35x + 5y = 25$.

1 PONT

Összesen:**3 PONT****4.****a)** Az első számjegy nem lehet nulla, így csak 9 lehetőség közül választhatunk.

1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

A második helyre ismét kilenc lehetőség közül választhatunk. (A 0 már lehet, de az első helyre beírt szám nem.)

1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

A harmadik helyre 8-, a negyedik helyre 7-, az ötödik helyre 6-féleképpen választhatunk számot, mivel a számjegyek nem ismétlődhetnek.

1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

Mivel az egyes választások egymástól függetlenek (például bármit is választottunk a második helyre, minden választásunk esetén 8-8 lehetőségünk van a harmadik számjegy megválasztására), a lehetőségek számát össze kell szorozni.

1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

Az állami telefonszámok száma: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$.

1 PONT

Összesen:

5 PONT

b) Egész számok szorzata pontosan akkor páros, ha legalább az egyik tényező páros.

1 PONT

(A komplementer-leszámlálás módszerét használva) az összes lehetőség számából vonjuk ki azoknak az eseteknek a számát, amikor a számok szorzata páratlan.

1 PONT

A lehetőségek száma: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

A megfelelő telefonszámok száma: 86 875.

1 PONT

Összesen:

3 PONT

c) Ha a két ismétlődő számjegy a 0, akkor a 0-k négy helyen állhatnak, a két helyet $\binom{4}{2}$ -féleképpen választhatjuk ki.

1 PONT

A maradék három helyen három különböző számjegy áll 9·8·7-féleképpen. Így pontosan két nulla 3024 esetben van.

1 PONT

Ha nem a 0 ismétlődik, akkor az ismétlődő számjegy egyike állhat az első helyen, vagy lehet, hogy egyik ismétlődő számjegy sem áll az első helyen. E mentén két esetet különítünk el.

1 PONT

1. eset

Az egyik ismétlődő számjegy (amely nem 0) az első helyen áll. Ekkor a másodikat 4-féleképpen helyezhetjük el, és ez a számjegy 9-féle lehet, míg a többi rendre 9-, 8-, illetve 7-féle. A lehetőségek száma: $4 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 18\,144$.

1 PONT

2. eset

Egyik ismétlődő számjegy sem az első helyen áll. Ekkor ezek helyét

$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ -féleképpen jelölhetjük ki. Ez a számjegy 9-féle lehet (0 nem), és az első helyen sem állhat 0, így ott 8-féle számjegy állhat, míg a többi helyi értéken rendre 8-, illetve 7-féle számjegy állhat. Az ilyen típusú telefon-számok száma: $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 24\,192$.

1 PONT

A lehetőségek száma: $3024 + 18\,144 + 24\,192 = 45\,360$.

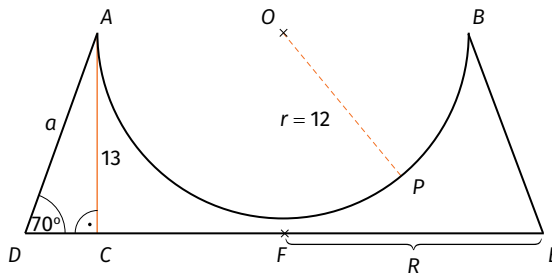
1 PONT

Összesen:

6 PONT

5.

a) Ábra az adatok feltüntetésével:



1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

A macskatál térfogatát a csonka kúp és a félgömb térfogatának különbsége adja.

1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

$$V_{\text{félgömb}} = \frac{4r^3\pi}{6} = 1152\pi \approx 3619,11 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

1 PONT

A csonka kúp térfogatának kiszámításához szükségünk van a csonka kúp alapkörének sugarára. Ez az ábrán látható ADC derékszögű háromszög segítségével kapható meg.

1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{R-r}, \quad \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{13}{R-12}, \quad R = \frac{13}{\operatorname{tg} 70^\circ} + 12 \approx 16,73 \text{ (cm)}.$$

2 PONT

$$V_{\text{csonka kúp}} = \frac{(R^2 + Rr + r^2)m\pi}{3} \approx 8504,75 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

2 PONT

A macskatál térfogata: $V_{\text{macskatál}} = 8504,75 - 3619,11 = 4885,64 \text{ cm}^3$. 1 PONT

A macskatál felszíne a csonka kúp fedőkör nélküli felszínének és a félgömb felszínének összege. 1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

A csonka kúp alkotója: $a = \frac{m}{\sin \alpha} = \frac{13}{\sin 70^\circ} \approx 13,83 \text{ (cm)}$. 2 PONT

$A_{\text{macskatál}} = R^2 \pi + (R + r)a\pi + 2r^2 \pi = 3032,35 \text{ cm}^2$. 1 PONT

Összesen: 13 PONT

b) Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlósági arány abszolút értékének köbe. (Jelen esetben számolhatunk pozitív arányú hasonlósággal.) 1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

Így $\frac{V'}{V} = 2 = \tau^3$, ahol τ a hasonlósági arány. Így $\frac{r'}{r} = \sqrt[3]{2}$, ahol r' a nagy macskatál fedőkörének sugara. 1 PONT

A nagy macskatál fedőkörének sugara: $r' = \sqrt[3]{2} \cdot r = \sqrt[3]{2} \cdot 12 \approx 15,12 \text{ cm}$. 1 PONT

Összesen: 3 PONT

6.

a) Mivel az egyes dobások kimenetele egymástól független, és minden egyes dobásnak két lehetséges kimenetele van, ezért az összes eset száma 2^{10} . 1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

1. megoldás

Mivel annak a valószínűsége, hogy fejből többet dobunk, mint írásból, ugyanannyi, mint hogy írásból dobunk többet, mint fejből, ezért elég annak valószínűségét meghatározni, hogy a dobott fejek és írások száma egyenlő. 1 PONT

Ez azt jelenti, hogy 5 fejet és 5 írást dobunk, ez pedig $\frac{10!}{5! \cdot 5!} = \binom{10}{5} = 252$ -féleképpen lehetséges. Annak valószínűsége, hogy a dobott fejek és írások száma egyenlő: $p = \frac{252}{2^{10}} \approx 0,246$. 1 PONT

Így a keresett valószínűség: $\frac{1-p}{2} = \frac{386}{2^{10}} \approx 0,377$. 1 PONT

2. megoldás

A dobott fejek száma lehet 10, 9, 8, 7 vagy 6. Ezek rendre $\binom{10}{10}$, $\binom{10}{9}$, $\binom{10}{8}$, $\binom{10}{7}$, $\binom{10}{6}$ -féleképpen lehetségesek, hiszen ki kell választanunk a 10 dobás közül melyik lesz az a 10, 9, ... stb. számú, amelyik fej lesz. (Más megközelítéssel a kedvező dobássorozatok száma rendre, $\frac{10!}{10! \cdot 0!}$, $\frac{10!}{9! \cdot 1!}$, $\frac{10!}{8! \cdot 2!}$, $\frac{10!}{7! \cdot 3!}$, $\frac{10!}{6! \cdot 4!}$, mert ennyiféle módon lehet sorba rendezni 10 F és 0 I, illetve 9 F és 1 I stb. jelet.)

A kedvező esetek száma: $\binom{10}{10} + \binom{10}{9} + \binom{10}{8} + \binom{10}{7} + \binom{10}{6} = 386$. (1 PONT)

A keresett valószínűség: $p = \frac{386}{2^{10}} \approx 0,377$. (1 PONT)

Összesen:**4 PONT**

b) Ha az írásk száma legalább annyi, mint a fejeké, akkor az lehet 5, 6, 7, 8, 9 vagy 10. 1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

Így az **a)** részben kapott kedvező esetek kiegészülnek a $\binom{10}{5}$, azaz a $\frac{10!}{5! \cdot 5!}$ számú 5 fej, 5 írás dobásához tartozó kedvező esetekkel. A kedvező esetek száma: $\binom{10}{10} + \binom{10}{9} + \binom{10}{8} + \binom{10}{7} + \binom{10}{6} + \binom{10}{5} = 638$. 1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az a) részt nem oldotta meg, de itt megadja a kedvező esetek számát.

A keresett valószínűség: $p = \frac{638}{2^{10}} \approx 0,623$. 1 PONT

Összesen:**3 PONT**

c) Az első 5 dobás eredménye bármi lehet, ezek viszont egyértelműen meghatározzák azt, hogy a következő öt dobás eredményének minek kell lennie. 1 PONT

Ezért a kedvező esetek száma: 2^5 . 1 PONT

A keresett valószínűség: $\frac{2^5}{2^{10}} = \frac{1}{2^5} = 0,03125$.

1 PONT

Összesen:

3 PONT

d) A 10-et kell két prímszám összegeként előállítani. Ez így lehetséges:
 $3+7$, $5+5$

2 PONT

Dobhatunk 3 fejet és 7 írást, vagy fordítva, illetve 5 fejet és 5 írást.

1 PONT

A kedvező esetek száma: $2 \binom{10}{7} + \binom{10}{5} = 492$.

2 PONT

A keresett valószínűség: $\frac{492}{2^{10}} \approx 0,480$.

1 PONT

Összesen:

6 PONT

7.

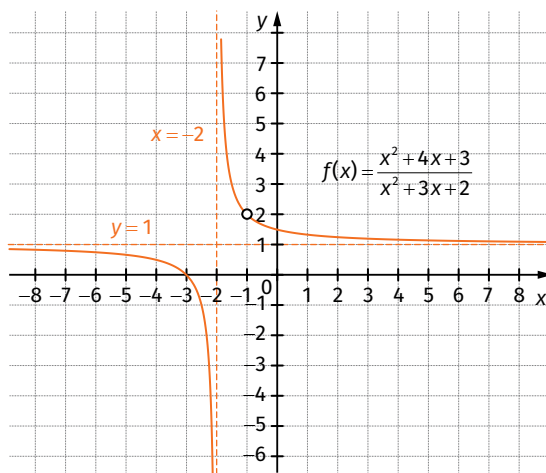
a) A számlálóban és a nevezőben található másodfokú kifejezéseket szorzattá alakítva: $f(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$, $x \neq -1$; -2 .

2 PONT

A hozzárendelési szabály egy lineáris törtfüggvény hozzárendelési szabálya, ami átalakítható így: $f(x) = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$.

1 PONT

A függvény grafikonja:



2 PONT

Összesen:

5 PONT

b) A számláló deriváltja: $2x + 4$

1 PONT

A nevező deriváltja: $2x + 3$

1 PONT

A hányados függvény deriválási szabálya alapján $f(x)$ derivált függvénye:

$$\frac{(2x+4)(x^2+3x+2)-(2x+3)(x^2+4x+3)}{(x^2+3x+2)^2}$$

2 PONT

Összesen:

4 PONT

$$c) p = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$$

1 PONT

Ezt átrendezve: $x = \frac{1}{p-1} - 2$, $p \neq 1$ ($p = 1$ esetén nincs megoldás).

3 PONT

Az eredeti függvény nem veszi fel a 2 értéket, így $p = 2$ esetén sincs megoldás.

2 PONT

Összefoglalva: ha $p \neq 1$ és $p \neq 2$, akkor pontosan egy megoldás van:

$$x = \frac{1}{p-1} - 2, \text{ ha } p = 1, \text{ vagy } 2, \text{ akkor nincs valós megoldás.}$$

1 PONT

Összesen:

7 PONT

8.

a) A 2015-ös árbevétel:

$$8 \cdot 10^6 \cdot 1,03 \cdot 1,05 \cdot 1,08 \cdot 0,95 \cdot 1,06 = 9\,409\,569,1 \approx 9\,410\,000 \text{ Ft.}$$

3 PONT

Összesen:

3 PONT

$$b) \text{ A 2006-os árbevétel: } \frac{8 \cdot 10^6}{0,95 \cdot 0,96 \cdot 1,03 \cdot 1,02} = 8\,349\,447,8 \approx 8\,349\,000 \text{ Ft.}$$

4 PONT

Összesen:

4 PONT

c) A nettó árbevétel-változás 2006 és 2015 között:

$$9\,409\,569,1 - 8\,349\,447,8 = 106\,012,13 \text{ Ft.}$$

1 PONT

Ez 9 év alatt következett be, így az átlagos változás:

$$\frac{106\,012,13}{9} = 117\,791,26 \text{ Ft.}$$

2 PONT

Összesen:

3 PONT

d) A 2010-es évhez képest az egyes évek nettó árbevétele a következő:

$$2011: 1,03 (= 103\%)$$

$$2012: 1,03 \cdot 1,05 = 1,0815 (= 108,15\%)$$

$$2013: 1,03 \cdot 1,05 \cdot 1,08 = 1,16802 (= 116,802\%)$$

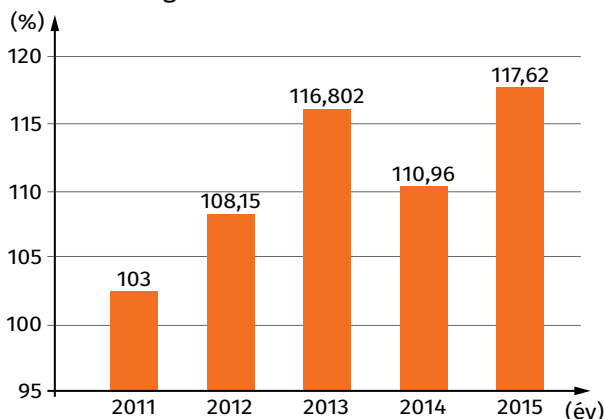
$$2014: 1,03 \cdot 1,05 \cdot 1,08 \cdot 0,95 = 1,1096 (= 110,96\%)$$

$$2015: 1,03 \cdot 1,05 \cdot 1,08 \cdot 0,95 \cdot 1,06 = 1,1762 (= 117,62\%)$$

4 PONT

A 2011-es kivételével 1-1 pont. Ha valahol rosszul számolt, ott nem kap pontot, de a további helyesen számolt adatokra jár pont.

A változást bemutató diagram:



2 PONT

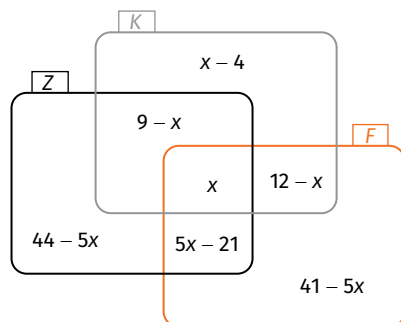
Ha rosszul számolt, de a kapott adatokat jól ábrázolja, maximális pontot kap.

Összesen:

6 PONT

9.

a) Készítsünk halmazábrát, és jelöljük x -szel a három hangszeren tanulók számát! Jelölje Z a zeneiskola zongorázó, K a klarinétos, F a furulyázó diákjainak halmazát! Az ábrán az egyes részhalmazok elemeinek számát tüntettük fel.



7 PONT

Helyesen kitöltött tartományonként 1-1 pont jár.

Az ábráról leolvasható, hogy $|Z \setminus K| = 44 - 5x + 5x - 21 = 23$, tehát 23 diák tanult zongorázni, de klarinétozni nem. 1 PONT

Összesen: 8 PONT

b) Az ábráról leolvasható, azok száma, akik nem furulyáznak $|F| = 44 - 5x + 9 - x + x - 4 = 49 - 5x$. 1 PONT

Az ábráról leolvasható, azok száma, akik csak furulyázni tanulnak $|F \setminus (Z \cup K)| = 41 - 5x$, 1 PONT

így azok száma, akik nem furulyáznak 8-cal több, mint azok száma, akik csak furulyán tanulnak. 1 PONT

Összesen: 3 PONT

c) Azokat, akik klarinétoznak vagy zongoráznak, a $Z \cup K$ halmaz tartalmazza. 1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

$|Z \cup K| = (44 - 5x) + (9 - x) + x + (5x - 21) + (x - 4) + (12 - x) = 44 + 9 - 21 - 4 + 12 = 40$ 1 PONT

Tehát 40 tanuló zongorázik vagy klarinétozik. 1 PONT

Összesen: 3 PONT

d) A diákok száma az ábráról leolvasható: $|Z \cup K \cup F| = 81 - 5x$. 1 PONT

Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.

Mivel $81 - 5x = 5(16 - x) + 1$ ($x \in \mathbb{N}$), ezért a diákok száma nem lehet ötten osztható. 1 PONT

Összesen: 2 PONT