I. RÉSZ

1. Mekkorák a belső szögei annak a két szabályos sokszögnek, amelynek összesen 57 oldala van és összes átlóik száma nem több 727-nél?

11 pont

2. Egy 98 főt foglalkoztató Kft. üzemi tanácsot választ. A tanács összetétele: 1 elnök és 4 tag. Hány olyan eset lehetséges, amikor a dolgozók közül Ács Dezső…

a) nem szerepel az üzemi tanácsban? 4 pont

b) elnöke az üzemi tanácsnak? 3 pont

c) nem elnökként tagja az üzemi tanácsnak? 4 pont

d) szerepel az üzemi tanácsban? 3 pont

14 pont

3. Az *ABC* háromszög *B* csúcsából kiinduló súlyvonalának egyenlete $x = 5$. Ugyanezen csúcsból induló magasságvonalának egyenlete $x + y = 3$, továbbá $C(9; 9)$.

a) Írja fel a *b* oldal egyenletét! 3 pont

b) Határozza meg a háromszög *B* csúcsnál lévő belső szögét! 8 pont

c) Határozza meg a csúcspontok első, illetve második koordinátáinak átlagát! Milyen geometriai jelentése van az e koordinátákkal megadott pontnak? 3 pont

14 pont

4. Egy téglatest térfogata 216 cm^3, felszíne 252 cm^2, az egy csúcsból induló éleinek hossza egy mértani sorozat egymást követő tagjai.

a) Mekkora az egy csúcsból induló élek hossza? 9 pont

b) Mekkora az egy csúcsból induló élek hosszának szórása? 3 pont

12 pont

II. RÉSZ

5. Tekintse a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=\frac{\pi}{4}\cos x$ és $g(x)=-\frac{1}{2\pi}x^2+\frac{\pi}{8}$ függvényeket!

a) Igazolja, hogy a g függvény grafikonjának $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ és $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ pontjaiba húzható érintők közös pontja illeszkedik az f függvény grafikonjára! **9 pont**

b) Az f és a g függvények grafikonjainak két közös pontja van a $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon: a $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ és a $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ pontok. A Bumeráng Kft. logójának alaprajzát az f és a g függvények grafikonjai által, a $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon közrezárt síkidommal modellezhetjük. Számítsa ki a Kft. logójának területét, ha koordináta-rendszerbeli 1 egység a valóságban 6 cm-nek felel meg! **7 pont**

16 pont

6. Klári és Angéla két barátnő, ugyanazon a napon szeretnének bevásárolni – véletlenszerűen választott időpontban – a kedvenc üzletükben.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egyidőben tartózkodnak a boltban, ha az üzlet 10 órától 18 óráig tart nyitva, és mindketten legfeljebb 2 órát töltenek az üzletben? **10 pont**

b) Klári a vásárlás után megállapította, hogy nem lépte túl a 12 ezer Ft-os keretét, 10 ezer Ft-nál azonban többet költött. Az elköltött összeg 7-es, 13-as és 19-es maradéka is 1. Hány forintot költött el Klári? **6 pont**

16 pont

7. **a)** Igaz-e, hogy egy négypontú, ötélű gráfban mindig van kör? Válaszát indokolja! **4 pont**

b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet! **12 pont**

$$(4x+3)\cdot(2x+2)=\frac{9}{(8x+7)^2}$$

16 pont

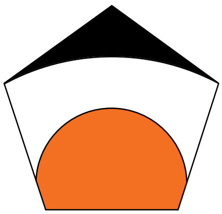
8. Egy társaságban öt politikus van: egy-egy volt jogász, orvos, mérnök, fizikatanár, vállalkozó. Pártbeli tisztségük szerint egy elnök, három alelnök, egy alelnök helyettes.

a) Állapítsa meg mindegyikőjükről, hogy mi a tisztségük és mi volt a foglalkozásuk, ha az alábbiakat tudjuk!

A) Csaba tisztsége megegyezik mérnök barátjáéval.
B) A fizikatanár jó barátságban van Edével.
C) A vállalkozó Bélával és Dénessel együtt Edénél járt vendégségben.
D) Nemrégiben a mérnöknek és a jogásznak egyszerre romlott el a videója, mindkét esetben Dénes hívta segítségül a fizikatanárt.
E) Ede eredetileg vállalkozó akart lenni, de mérnök barátja tanácsára más pályát választott.
F) Csaba Dénesnek, Béla Edének a beosztottja.
G) András látogatóba készül Dénesékhez.

10 pont

b) Az egyik politikus választási kampányára kitűzőket készíttetett. A kitűző három sávból áll. A sávok mindegyike egymástól függetlenül fekete, fehér és narancssárga színnel színezhető. Egy-egy szín többször is használható, egy-egy sávot egyszerre csak egy színnel színezünk, és a szomszédos sávok lehetnek azonos színűek. A gyártó cég legyártja a fenti feltételeknek megfelelő összes kitűző egy-egy mintadarabját. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a legyártott darabokból négy darabot véletlenszerűen, visszatevéssel kiválasztva, a kiválasztott darabok között pontosan egy olyan kitűző van, amelyen legalább az egyik sáv narancssárga?



6 pont

16 pont

9. **a)** Az *ABCDEFGH* kocka éle 12 egység. Jelölje az *AE* él *A*-hoz közelebbi harmadoló pontját *P*, a *BF* él *B*-hez közelebbi negyedelő pontját *Q*, a *CG* él felezőpontját *R*, és a *PQR* sík és a *DH* él közös pontját *S*! Számítsa ki az *SD* szakasz hosszát!

8 pont

b) Mely valós számok megoldásai az $(x+2)^3-(x-2)^3>12x+160$ egyenlőtlenségnek?

8 pont

16 pont

	Feladat sorszáma	Maximális pontszám	Elért pontszám
I. rész	1.	11	
	2.	14	
	3.	14	
	4.	12	
II. rész		16	
		16	
		16	
		16	
		← Nem választott feladat sorszáma	
Összpontszám:		**115**	

I. RÉSZ

1. Jelöljük az egyik sokszög oldalszámát x-szel, a másikét y-nal! Ekkor a feladat feltételei szerint:

(1) $x+y=57$ és (2) $\dfrac{x\cdot(x-3)}{2}+\dfrac{y\cdot(y-3)}{2}\le 727$ áll fenn. **3 pont**

(1)-ből kifejezve y-t, majd (2)-be behelyettesítve: $x^2-57x+812\le 0$ egyenlőtlenség adódik. **2 pont**

Az egyenlőtlenség megoldása: $28\le x\le 29$, mivel x egész, ezért $x_1=28; x_2=29$, melyből $y_1=29; y_2=28$. A keresett sokszögek oldalszáma 28, illetve 29.

2 pont

A 28 oldalú szabályos sokszög belső szögeinek nagysága:

$$\alpha=\frac{(28-2)\cdot 180^\circ}{28}=\frac{1170^\circ}{7}=167{,}14^\circ.$$ **2 pont**

A 29 oldalú szabályos sokszög belsőszögeinek nagysága:

$$\beta=\frac{(29-2)\cdot 180^\circ}{29}=\frac{4860^\circ}{29}=167{,}59^\circ.$$ **2 pont**

11 pont

2. **a)** Ács Dezső annyi esetben nem szerepel a tanácsban, ahányféleképpen rajta kívül 97 főből 1 elnököt és a megmaradó 96 főből 4 tagot ki lehet választani. Mivel ismétlődés nem lehet, illetve a tagok között különbséget nem teszünk (azaz különböző sorrendeket nem tekintünk különbözőnek), ezért a lehetséges kiválasztások száma: $C_{97}^1\cdot C_{96}^4=\binom{97}{1}\cdot\binom{96}{4}=322\,230\,120.$ **4 pont**

b) Ács Dezső annyiféleképpen lehet elnöke a tanácsnak, ahányféleképpen rajta kívül 97 főből 4 tagot ki lehet választani. Mivel ismétlődés nem lehet, illetve a tagok között különbséget nem teszünk (azaz különböző sorrendeket nem tekintünk különbözőnek), ezért a lehetséges kiválasztások száma 97 elem 4 tagú ismétlés nélküli kombinációinak számával egyezik meg: $C_{97}^4=\binom{97}{4}=3\,464\,840.$ **3 pont**

c) Ács Dezső nem elnökként annyi esetben lehet tagja a tanácsnak, ahányféleképpen rajta kívül 97 főből 1 elnököt és a megmaradó 96 főből 3 tagot ki lehet választani.

Ezek száma: $C_{97}^1\cdot C_{96}^3=\binom{97}{1}\cdot\binom{96}{3}=13\,859\,360.$ **4 pont**

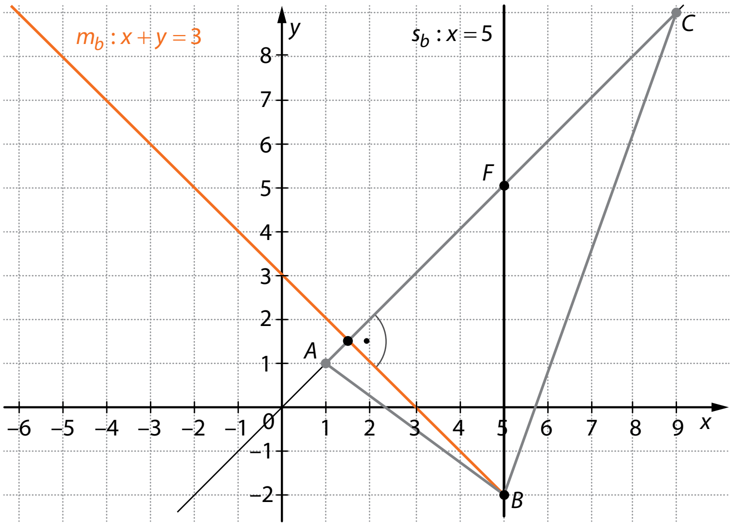
d) Ács Dezső vagy elnökként vagy tagként szerepelhet a tanácsban, ezért a **b)** és a **c)** rész alapján ez

$$C_{97}^{1}\cdot C_{96}^{3}+C_{97}^{4}=\binom{97}{1}\cdot\binom{96}{3}+\binom{97}{4}=13\,859\,360+3\,464\,840=17\,324\,200\text{-féleképpen}$$

lehetséges.

3 pont

3. Készítsünk ábrát!



a) Az m egyenes normálvektora (1; 1) egyben a b egyenes irányvektora.

1 pont

Így a $C(9; 9)$ pont segítségével a b egyenes irányvektoros egyenlete: $x-y=0$.

2 pont

3 pont

b) Határozzuk meg a háromszög hiányzó csúcspontjait!
Mivel a B pont illeszkedik a háromszög B csúcsából induló magasságvonalára és súlyvonalára is, ezért B megfelelő koordinátái az (1) $x=5$ és (2) $x+y=3$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása, így a B pont koordinátái $B(5; -2)$. **2 pont**

Az F pont illeszkedik a háromszög b oldalára és a B csúcsából induló súlyvonalára is, ezért F megfelelő koordinátái az (1) $x-y=0$ és (2) $x=5$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása, így az F pont koordinátái $F(5; 5)$. Mivel F felezi az AC szakaszt, a felezőpont koordinátáira vonatkozó összefüggés alapján $A(1; 1)$. **3 pont**

$\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok skalárszorzatának kétféle felírásából:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{(-4)\cdot 4+3\cdot 11}{\sqrt{(-4)^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+11^2}} = \frac{17}{5\cdot\sqrt{137}},$$ ebből $\beta = 73{,}11°$. **3 pont**

8 pont

c) A fentiek szerint $A(1; 1)$, $B(5; -2)$, $C(9; 9)$. Emiatt a megfelelő koordináták átlaga:

$\bar{x} = \frac{1+5+9}{3} = 5$, illetve $\bar{y} = \frac{1+(-2)+9}{3} = \frac{8}{3}$. **2 pont**

A súlypont koordinátáinak meghatározására vonatkozó összefüggés miatt az $(\bar{x}; \bar{y})$ éppen a súlypontot adja meg. **1 pont**

3 pont

4. a) Legyen az egy csúcsból induló élek hossza: a; aq; aq^2 (a és q pozitívak)! **1 pont**

A feladat feltételei miatt: (1) $a^3q^3 = 216$ és (2) $2\cdot\left(a^2q^3+a^2q^2+a^2q\right) = 252$. **3 pont**

(1)-ből köbgyököt vonva adódik: $a = \frac{6}{q}$, behelyettesítve a (2) egyenletbe

$2q^2-5q+2=0$, ebből $q_1 = 2$; $q_2 = \frac{1}{2}$, **3 pont**

ahonnan $a_1 = 3$; $a_2 = 12$. Az egy csúcsból induló élek hossza: 3; 6; 12. **2 pont**

9 pont

b) Az egy csúcsból induló élek hosszának átlaga: $\bar{x} = \frac{3+6+12}{3} = 7$. **1 pont**

Az egy csúcsból induló élek hosszának szórása:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(3-7)^2+(6-7)^2+(12-7)^2}{3}} = \sqrt{14}.$$ **2 pont**

3 pont

II. RÉSZ

5. a) A g függvény grafikonjának x_0 abszcisszájú pontjába húzható érintő egyenlete: $y-g(x_0)=g'(x_0)\cdot(x-x_0)$. **1 pont**

Mivel $g'(x)=-\frac{1}{\pi}x$, **1 pont**

ezért a g függvény grafikonjának $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ abszcisszájú pontjaiban húzható érintők egyenlete:

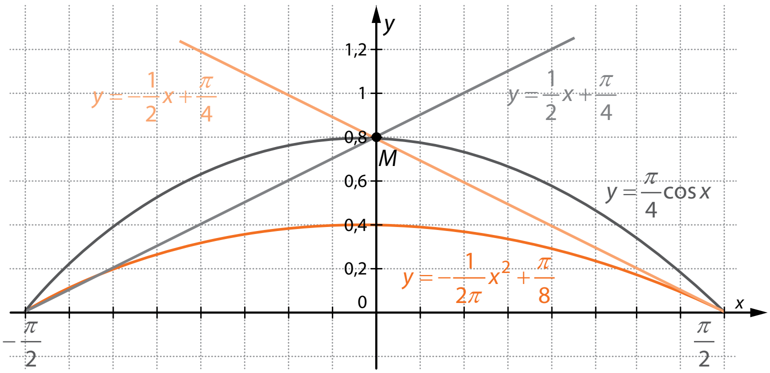
(1) $y-0=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

(2) $y-0=-\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

2+2 pont

Az (1), (2) alatti egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása, az érintők közös pontjának koordinátái: $M\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$. **2 pont**

Mivel $f(0)=\frac{\pi}{4}\cos 0=\frac{\pi}{4}$, ezért az érintők közös pontja illeszkedik az f függvény grafikonjára. Ezzel az állítást beláttuk. **1 pont**



9 pont

b) A feladat szövege szerint az $f(x)=g(x)$ egyenletnek, a $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$-on az $x_1=-\frac{\pi}{2}$ és az $x_2=\frac{\pi}{2}$ tesz eleget. A görbék közötti területet a különbségfüggvény abszolút értékének az integrálja adja meg: $T=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{4}\cos x+\frac{1}{2\pi}x^2-\frac{\pi}{8}\right)dx$. **1 pont**

$$T=\left[\frac{\pi}{4}\sin x+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{\pi}{8}x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^3}{24}-\frac{\pi^2}{16}\right)-\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi^2}{16}\right)=$$

$$=\frac{6\pi-\pi^2}{12}$$

3 pont

A hatszoros nagyítás során a terület harminchatszorosára nő, 1 pont

így a logó területe: $T_{\text{logó}}=18\pi-3\pi^2\approx 26{,}94\ \text{cm}^2$. 2 pont

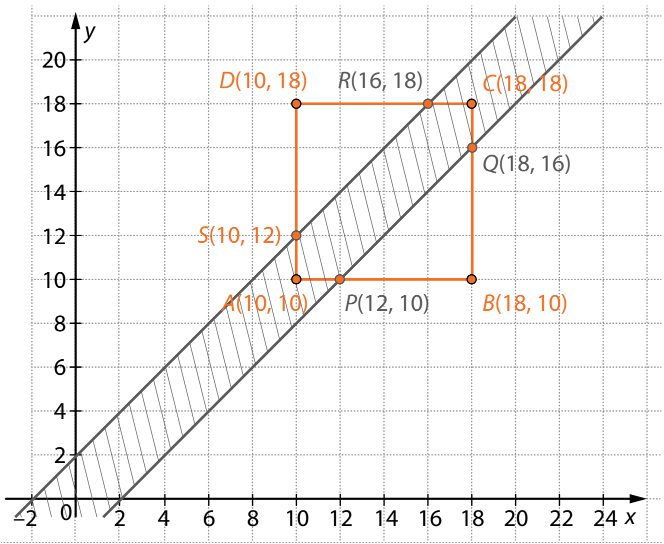
7 pont

6. **a)** Legyen Klári érkezési ideje: *x*; Angéla érkezési ideje: *y*!

Az egyidejű tartózkodás feltétele: (1) $|x-y|\le 2$ (vagy $x-2\le y\le x+2$). 2 pont

Az üzlet nyitva tartása miatt: (2) $10\le x\le 18$ és $10\le y\le 18$. 2 pont

Szemléltessük a fenti feltételeknek megfelelő $(x;\,y)$ pontokat a koordinátasíkon!



2 pont

Így a keresett valószínűség (*p*) – a geometriai valószínűségről tanultak szerint – az *APQCRS* területének és az *ABCD* négyzet területének hányadosa $\left(\frac{T_{APQCRS}}{T_{ABCD}}\right)$.

1 pont

$$T_{APQCRS} = T_{ABCD} - 2 \cdot T_{PBQ} = 8^2 - 2 \cdot \frac{6^2}{2} = 28$$ **2 pont**

Tehát annak a valószínűsége, hogy a két barátnő egy időben tartózkodik az üzletben: $p = \frac{28}{64} = \frac{7}{16} = 0{,}4375.$ **1 pont**

10 pont

b) Az elköltött összeg 7-es, 13-as és 19-es maradéka is 1, ezért az elköltött összeg $7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot n + 1 = 1729n + 1$ alakú, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$. **2 pont**

Klári nem lépte túl a 12 ezer Ft-os keretét, de 10 ezer Ft-nál többet költött, így $10\,000 < 1\,729n + 1 \leq 12\,000$ **1 pont**

$$\frac{9\,999}{1\,729} < n \leq \frac{11\,999}{1\,729}$$ **1 pont**

Innen $n \in \mathbb{Z}^+$ miatt, $n = 6$ adódik. **1 pont**

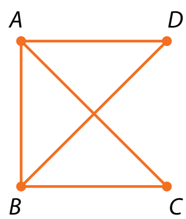
Tehát Klári 10 375 forintot költött. **1 pont**

6 pont

7. **a)** A négypontú teljes gráf minden csúcsa harmadfokú, éleinek száma pedig hat. **1 pont**

Egy élt elhagyva a feladat feltételeinek megfelelő gráfhoz jutunk. **1 pont**

A pontok fokszámai: 3, 3, 2, 2. A két harmadfokú pont (A, B), és az egyik másodfokú pont (C vagy D) kört alkot.



Tehát az állítás igaz. **2 pont**

4 pont

b) Az egyenlet alaphalmaza $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{8}\right\}$. 1 pont *

** Ez az 1 pont akkor is adható, ha nem teszünk kikötést az alaphalmazra, de ellenőrzünk.*

A kijelölt műveletek elvégzése után kapjuk: $8x^2+14x+6=\frac{9}{64x^2+112x+49}$. 2 pont

Az egyenlet két oldalát 8-cal megszorozva: $64x^2+112x+48=\frac{72}{64x^2+112x+49}$ egyenlethez jutunk.

Legyen $y=64x^2+112x+49=(8x+7)^2$! 1 pont

$y(>0)$-t behelyettesítve az egyenletbe adódik, hogy $y-1=\frac{72}{y}$. 1 pont

Ahonnan $y^2-y-72=0 \Rightarrow y_1=9 \;\; y_2=-8$. 1+1 pont

Az $y>0$ feltétel miatt $y=9$ teljesülhet csak, azaz 1 pont **

*** Ez az 1 pont jár abban az esetben is, ha az $y>0$ feltételt nem vesszük figyelembe, és a $(8x+7)^2=-8$ egyenletet helyesen oldjuk meg.*

$(8x+7)^2=9$, ebből $|8x+7|=3$ 1 pont

$x_1=-\frac{1}{2}, x_2=-\frac{5}{4}$ 1 pont

Ellenőrzés behelyettesítéssel:

A $\left(4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\right)\cdot\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\right)=\frac{9}{\left(8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+7\right)^2}$ és

a $\left(4\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+3\right)\cdot\left(2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+2\right)=\frac{9}{\left(8\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+7\right)^2}$ egyenlőségek teljesülnek.

1 pont ***

**** Ez az 1 pont ekvivalens átalakításokra való hivatkozásért is adható.*

Tehát a feladat megoldása: $\left\{-\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right\}$. 1 pont

12 pont

8. **a)** **A)** Csaba nem mérnök és (1) Csaba, illetve a mérnök is alelnök. **1 pont**

F) és a pártbeli tisztségek eloszlása miatt:
Dénes elnök, (2) Ede és András alelnök, Béla alelnök helyettes. **2 pont**

C) és **D)** miatt Dénes nem jogász, nem mérnök, nem fizikatanár, nem vállalkozó ezért (3) Dénes orvos. **1 pont**

E) miatt Ede nem mérnök, így az (1) és (2) miatt (4) András mérnök. **2 pont**

B), **C)**, **E)**, (3) és (4) miatt (5) Ede jogász. **1 pont**

C), (3), (4), (5) miatt Béla fizikatanár ezért Csaba vállalkozó. **2 pont**

Összegezve: András alelnök és mérnök; Béla alelnök helyettes és fizikatanár; Csaba alelnök és vállalkozó; Dénes elnök és orvos; Ede alelnök és jogász; **1 pont**

10 pont

b) Az összes színezési lehetőség száma: $3^3 = 27$. **1 pont**

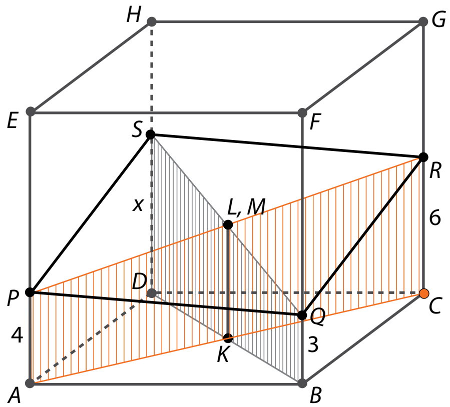
A komplementer leszámolás módszerét alkalmazzuk: nem megfelelőek azok a színezések, amelyeknél egyik sáv sem narancssárga, ezek száma: $2^3 = 8$. **2 pont**

Így annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott kitűző olyan, amelyen legalább az egyik sáv narancssárga: $p = \dfrac{27-8}{27} = \dfrac{19}{27}$. **1 pont**

A keresett valószínűség: $\binom{4}{1} \cdot \left(\dfrac{19}{27}\right)^1 \cdot \left(\dfrac{8}{27}\right)^3 \approx 0{,}0732$. **2 pont**

6 pont

9. **a)** Készítsünk ábrát! A feltételek alapján $AP = 4$, $BQ = 3$, és $RC = 6$. **1 pont**



Az $ACRP$ és a $BQSD$ trapéz, mert AP és CR párhuzamos, illetve BQ és DS párhuzamos.

1 pont

Legyen L a PR, M a QS felezőpontja! K felezi AC-t, ezért a KL az $ACRP$, KM a $BQSD$ trapéznak a középvonala. Emiatt KL és AP párhuzamos, $KL = \frac{4+6}{2} = 5$ és $KM \parallel BQ$, $KM = \frac{x+3}{2}$.

2 pont

AP és BQ párhuzamos, KL és AP párhuzamos, KM és BQ párhuzamos, ezért KL és KM is párhuzamos. Ebből következően $L = M$,

2 pont

így $5 = \frac{x+3}{2}$,

1 pont

amiből $x = 7$. Tehát az SD szakasz 7 egység hosszúságú.

1 pont

8 pont

b) A kijelölt műveletek elvégzése,

2 pont

és nullára redukálás után a $12x^2 - 12x - 144 > 0$ egyenlőtlenséget kapjuk.

1 pont

A $12x^2 - 12x - 144 = 0$ megoldásai: $x_1 = 4$, $x_2 = -3$.

1+1 pont

Mivel a másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív,

1 pont

ezért az egyenlőtlenség megoldása: $x < -3$ vagy $x > 4$.

2 pont

8 pont