I. RÉSZ

1. Adott két halmaz. A a 9-nél kisebb páros pozitív egészek; B a 30-nál kisebb, 6-tal osztható pozitív egészek halmaza. Adja meg az $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazokat!

2 pont

2. Adja meg az alábbi állítások logikai értékét!

A) Ha $a < b$, akkor $|a| < |b|$.
B) Ha egy szám osztható 2-vel és 5-tel, akkor a szám 0-ra végződik.
C) Minden paralelogramma trapéz.

2 pont

3. A $\overline{32745x4}$ tízes számrendszerbeli számban írjon x helyére olyan számjegyet, hogy a kapott hétjegyű szám osztható legyen 12-vel! Válaszát indokolja!

3 pont

4. Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto x^2 - 4x + 3$ függvény szélsőértékét és annak helyét! Válaszát indokolja!

4 pont

5. Egy találkozón hat ember vett részt. A résztvevők egyharmada 5, ketten közülük 3, a többiek pedig 2 emberrel fogtak kezet. Szemléltesse gráffal a kézfogásokat!

3 pont

6. A valós számok halmazán értelmezett, f elsőfokú függvény grafikonjára az $A(-1;\ 2)$ és a $B(2;\ 8)$ pontok illeszkednek. Adja meg az f függvény hozzárendelési szabályát! Válaszát indokolja!

3 pont

7. Melyik x valós szám esetén igaz a következő egyenlőség: $0{,}2^{-x} = 25$?

2 pont

8. „Minden fiú szereti a focit."
Válassza ki a fenti állítás tagadását az alábbiak közül!

A) „Van olyan fiú, aki szereti a focit."
B) „Nincs olyan fiú, aki szereti a focit."
C) „A lányok szeretik a focit."
D) „Van olyan fiú, aki nem szereti a focit."
E) „A lányok nem szeretik a focit."

2 pont

9. Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $g(x) = 2\cos x - 1$ függvény értékkészletét!

2 pont

10. Egy 37 fős osztályban legalább hány tanulóról lehet azt állítani, hogy születésnapjuk ugyanabban a hónapban van?

2 pont

11. Mely valós x-re teljesül, hogy $|x-2|-3=0$?

2 pont

12. Három házaspár színházba ment. Egymás mellé vettek jegyet. Hányféleképpen ülhetnek le, ha a házastársak egymás mellé akarnak ülni? Válaszát indokolja!

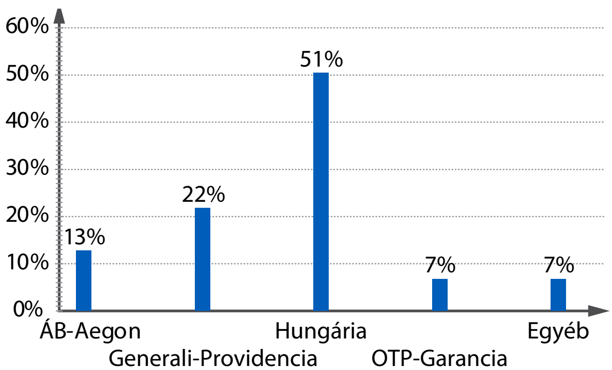
3 pont

II. RÉSZ

II. A

13. **a)** Töltse ki a táblázatot az adott oszlopdiagram alapján, ha az összes díjbevétel 15 750 millió forint!

Biztosítók	Gépjármű-biztosítások díjbevételei (millió Ft)
ÁB-Aegon	
Generali-Providencia	
Hungária	
OTP-Garancia	
Egyéb	



Gépjármű-biztosítások díjbevételeinek megoszlása

5 pont

b) Ábrázolja kördiagramon a gépjármű-biztosítások díjbevételeinek megoszlását!

7 pont

12 pont

14. Egy trapéz alapjai 2,5 és 4 cm, kiegészítő háromszögének további oldalai 1,5 és 2 cm hosszúak.

a) Mekkorák a trapéz szárai? **5 pont**

b) Mekkora a kiegészítő háromszög területe? **3 pont**

c) Mekkora a trapéz területe? **4 pont**

12 pont

15. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{3}$; **4 pont**

b) $\log_3(5x-1)-\log_3(x+1)=1$. **8 pont**

12 pont

II. B

16. Egy gyertyakészítő vállalkozás a karácsonyi vásárra olyan 3 gyertyából álló gömb alakú gyertyasorozatot dobott piacra, amelynél a gömbök sugarai egy mértani sorozat egymást követő tagjai. 1000 ilyen gyertyasorozat készítéséhez $328{,}5\pi\ \mathrm{dm}^3$ térfogatú anyagot használtak fel. A gyertyasorozat legnagyobb gömbjének sugara 6 cm.

a) Mekkorák a gyertyasorozat gömbjeinek sugarai? **10 pont**

b) A vásár helyszínére történő szállításkor a gyertyasorozatok 5%-a megsérült. 2 gyertyasorozat kiválasztásakor mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik sérült? **4 pont**

c) A gyertyasorozat tervezett ára 1900 Ft volt a tervezett mennyiség mellett. A sérült sorozatok kivétele után hány százalékkal növelje meg a vállalkozó hibátlan termékeinek árát, ha a tervezett bevételt el szeretné érni? **3 pont**

17 pont

17. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 36, négyzetösszege 482.

a) Határozza meg a számtani sorozat differenciáját! **7 pont**

b) Oldja meg a valós számok halmazán a $2x^2-3x+1>0$ egyenlőtlenséget! **5 pont**

c) Hány olyan, három különböző számjegyből álló, háromjegyű, öttel osztható számot tudunk készíteni, amelynek mindegyik számjegye eleme a $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaznak?

5 pont

17 pont

18. Tekintse a 19, −2, −8, 0, −1, −8, −8, −1, −9 számsokaságot! Az *A* pont abszcisszája a számsokaság mediánja, ordinátája a számsokaság terjedelmének negyede, a *B* pont abszcisszája a számsokaság módusza, ordinátája a számsokaság átlaga.

a) Határozza meg az *A* és a *B* pontok koordinátáit! 6 pont

b) Írja fel a $C(-1; 7)$ és $D(-7; -1)$ átmérőjű kör (k) egyenletét! 4 pont

c) Az *y* tengely mely pontjaiból látszik a *CD* szakasz derékszög alatt?

5 pont

d) Illeszkedik-e az $(x+3)^2+(y-4)^2=17$ egyenletű körre a $P(-6; 7)$ pont?

2 pont

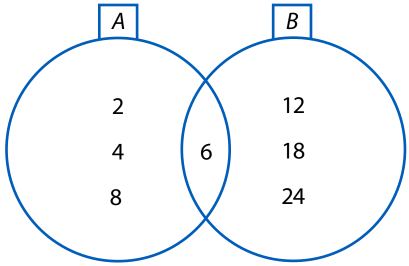
17 pont

	Feladat sorszáma	Maximális pontszám	Elért pontszám
I. rész	1–12.	30	
II. A rész	13.	12	
	14.	12	
	15.	12	
II. B rész		17	
		17	
		← Nem választott feladat sorszáma	
Összpontszám:		**100**	

I. RÉSZ

1. Adja meg az *A*, illetve a *B* halmazokat elemeik felsorolásával, majd készítsen halmazábrát!

$$A=\{2;4;6;8\},$$
$$B=\{6;12;18;24\}.$$



Így az ábráról könnyen leolvasható: $A\cap B=\{6\}$, $B\setminus A=\{12;18;24\}$. **2 pont**

2. **A)** Hamis. **B)** Igaz. **C)** Igaz.
2 jó válasz esetén 1 pont, 1 jó válasz esetén 0 pont jár. **2 pont**

3. Egy egész szám akkor és csak akkor osztható 12-vel, ha a szám osztható 3-mal és 4-gyel.
4-gyel egy szám akkor és csak akkor osztható, ha az utolsó két számjegye által alkotott legfeljebb kétjegyű szám osztható 4-gyel, tehát

(1) $4\mid\overline{x4}\Rightarrow x\in\{0;2;4;6;8\}.$ **1 pont**

3-mal egy szám akkor és csak akkor osztható, ha a szám számjegyeinek összege osztható 3-mal, tehát

(2) $3\mid 3+2+7+4+5+x+4=25+x \Rightarrow x\in\{2;5;8\}.$ **1 pont**

A feladat megoldása az (1) és a (2) alapján $x_1=2;\ x_2=8.$ **1 pont**

4. **I. megoldás:**

Másodfokú függvény hozzárendelési szabályának általános alakja:
$x\mapsto ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0).$
Mivel $a=1>0$, ezért minimuma van a vizsgált függvénynek; a minimum helye:
$x=-\dfrac{b}{2a}=2;$ **2 pont**

a minimum: $\dfrac{4ac-b^2}{4a}=-1.$ **2 pont**

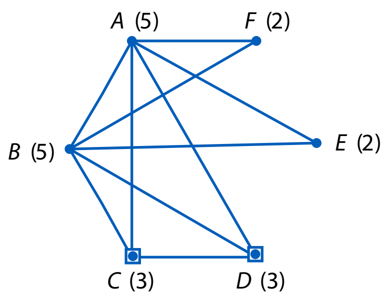
II. megoldás: Bontsuk fel az x^2-4x+3 kifejezést egy teljes négyzet és egy szám összegére: $x^2-4x+3=x^2-4x+4-1=(x-2)^2-1$.

2 pont

Mivel $(x-2)^2\geq 0$ minden x-re, ezért $(x-2)^2-1\geq -1$, így a minimum: -1; helye: 2.

2 pont

5. A kézfogásokat egy hatcsúcsú gráffal szemléltetjük, melynek csúcsai a résztvevőket, élei pedig a kézfogásokat szemléltetik. A résztvevők egyharmada $\frac{6}{3}=2$, tehát 2 csúcsnak 5 a fokszáma (az ebbe a pontba húzott élek száma), 2 csúcsnak 3, és a fennmaradó 2 csúcsnak 2. Az ezeknek az értékeknek megfelelő gráf például az ábrán látható.



3 pont

6. Az elsőfokú függvény grafikonja egyenes, hozzárendelési szabálya $f(x)=mx+b$ alakú, ahol m nem zérus. Az A és B pontok által meghatározott egyenes meredeksége: $m=\frac{8-2}{2-(-1)}=2$.

1 pont

A függvény 2-höz 8-at rendel, azaz $8=2\cdot 2+b$, ahonnan $b=4$ adódik.

1 pont

Az f függvény hozzárendelési szabálya $f(x)=2x+4$.

1 pont

7. Az egyenlőség megoldáshalmaza: $\{2\}$.

2 pont

8. Az állítás tagadása a **D)** válasz.

2 pont

9. $R_g=[-3;\,1]$.

2 pont

10. A hónapok (skatulyák) száma 12, a tanulók száma $37=3\cdot 12+1$,

1 pont

így a skatulyaelv szerint legalább 4 tanulóról lehet biztosan azt állítani, hogy ugyanabban a hónapban születtek.

1 pont

11. $x_1=5$ és $x_2=-1$.

1-1 pont

12. 3 házaspár sorban 3! számú „kettős” széket foglal el.

1 pont

Minden házaspár férfi- és nőtagjának cseréje a lehetséges esetek számát megkétszerezi, tehát a feltételeknek megfelelő esetek száma: $3!\cdot 2^3 = 48$. **2 pont**

II. RÉSZ

II. A

13. **a)** A diagramról leolvasható a gépjármű-biztosítások díjbevételeinek megoszlása. Az egyes biztosítók díjbevételeit a $d = A\frac{p}{100}$ összefüggésből megkaphatjuk, ahol A az összes díjbevétel; p az egyes biztosítók részesedése (százalékban kifejezve) a díjbevételből; d az egyes biztosítók díjbevétele (millió Ft-ban).

2 pont

Biztosítók	Gépjármű-biztosítások díjbevételeinek megoszlása (p%)	Gépjármű-biztosítások díjbevételei (d)
ÁB-Aegon	13%	2 047,50
Generali-Providencia	22%	3 465
Hungária	51%	8 032,50
OTP-Garancia	7%	1 102,50
Egyéb	7%	1 102,50
	100%	15 750,00 = A

3 pont

ÁB-Aegon esetén: $d = 15\,750 \text{ mFt}\ \frac{13}{100} = 2\,047{,}5 \text{ mFt}$.

Generali-Providencia esetén: $d = 15\,750 \text{ mFt}\ \frac{22}{100} = 3\,465 \text{ mFt}$.

Hungária esetén: $d = 15\,750 \text{ mFt}\ \frac{51}{100} = 8\,032{,}5 \text{ mFt}$.

OTP-Garancia esetén: $d = 15\,750 \text{ mFt}\ \frac{7}{100} = 1\,102{,}5 \text{ mFt}$.

Egyéb biztosítók esetén: $d = 15\,750 \text{ mFt}\ \frac{7}{100} = 1\,102{,}5 \text{ mFt}$.

5 pont

b) A kördiagramon való ábrázoláshoz ki kell számolnunk az egyes biztosítók díjbevételeinek megfelelő körcikkek középponti szögeit az $\alpha° = \frac{360°}{100} \cdot p$ összefüggés alapján, ahol p az egyes biztosítók részesedése (százalékban, az ábráról leolvasható) a díjbevételből.

2 pont

ÁB-Aegon esetén: $\alpha° = \frac{360°}{100} \cdot 13 = 46{,}8°$.

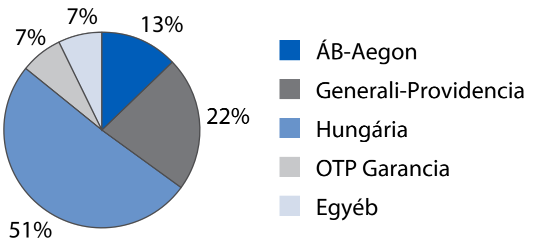
Generali-Providencia esetén: $\alpha° = \frac{360°}{100} \cdot 22 = 79{,}2°$.

Hungária esetén: $\alpha° = \frac{360°}{100} \cdot 51 = 183{,}6°$.

OTP-Garancia esetén: $\alpha° = \frac{360°}{100} \cdot 7 = 25{,}2°$.

Egyéb biztosítók esetén: $\alpha° = \frac{360°}{100} \cdot 7 = 25{,}2°$.

3 pont

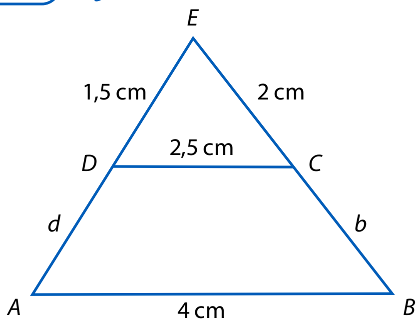


2 pont

Gépjármű-biztosítások díjbevételeinek megoszlása

7 pont

14. **a)** Készítsen ábrát!



1 pont

$AB \| CD \Rightarrow EDC\sphericalangle = EAB\sphericalangle$ és $DCE\sphericalangle = ABE\sphericalangle$ (egyállású szögek) $\Rightarrow EDC\triangle$ és az $EAB\triangle$ hasonló. Így (1) $\frac{EA}{ED} = \frac{AB}{DC}$ és (2) $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{DC}$.

2 pont

(1)-be behelyettesítve: $\frac{1,5+d}{1,5}=\frac{4}{2,5}\Rightarrow d=0,9$ cm, 1 pont

(2)-be behelyettesítve: $\frac{2+b}{2}=\frac{4}{2,5}\Rightarrow b=1,2$ cm. 1 pont

5 pont

b) A kiegészítő háromszögre: $1,5^2+2^2=2,5^2$, ezért Pitagorasz tételének megfordításából $\Rightarrow$ a háromszög derékszögű 1 pont

$\Rightarrow CED\sphericalangle=90°\Rightarrow T=\frac{1,5\cdot 2}{2}=\frac{3}{2}\text{ cm}^2=1,5\text{ cm}^2.$ 2 pont

3 pont

c) I. megoldás:

$AB\,||\,CD$ és $\Rightarrow EDC\sphericalangle=EAB\sphericalangle$ és $DCE\sphericalangle=ABE\sphericalangle$ (egyállású szögek) $\Rightarrow EDC_\triangle\sim EAB_\triangle$. 1 pont

A hasonlóság aránya: $\lambda=\frac{DC}{AB}=\frac{2,5}{4}=\frac{5}{8}\Rightarrow$ az $EDC_\triangle$, és az $EAB_\triangle$ területének aránya: 1 pont

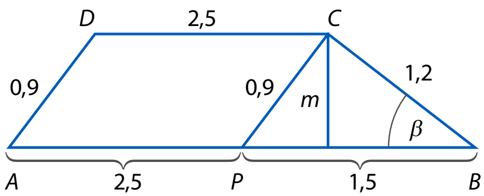
$$\lambda^2=\frac{25}{64}\Rightarrow\frac{T_{EDC}}{T_{EAB}}=\frac{25}{64}\Rightarrow T_{EAB}=\frac{64}{25}\cdot T_{EDC}=\frac{64}{25}\cdot\frac{3}{2}=3,84\text{ cm}^2\Rightarrow$$

$$T_{ABCD}=T_{EAB}-T_{EDC}=3,84-1,5=2,34\text{ cm}^2.$$ 2 pont

4 pont

II. megoldás:

Toljuk el a trapéz DA szárát $\overrightarrow{DC}$ vektorral! A keletkező PBC háromszög PB oldalához tartozó magasság a trapéz magassága (m) is egyben. 1 pont



A PBC háromszög CP oldalára felírjuk a koszinusztételt:

$$CP^2=PB^2+BC^2-2\cdot PB\cdot BC\cdot\cos\beta.$$

Behelyettesítve: $0,81=2,25+1,44-2\cdot1,5\cdot1,2\cdot\cos\beta$. **1 pont**

Ebből $\cos\beta=0,8\Rightarrow\beta=36,87°\Rightarrow m=BC\cdot\sin\beta=1,2\cdot\sin36,87°=0,72$ cm. **1 pont**

Így a trapéz területe: $T=\dfrac{4+2,5}{2}\cdot0,72=2,34\ \text{cm}^2$. **1 pont**

4 pont

15. **a)** Az egyenlet értelmezési tartománya: $x\neq\pi+m2\pi$, ahol $m\in\mathbb{Z}$. **1 pont**

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$. **3 pont**

4 pont

b) A logaritmus definíciója miatt $5x-1>0$ és $x+1>0\Rightarrow x>\dfrac{1}{5}$. **2 pont**

A logaritmus azonosságait felhasználva kapjuk: $\log_3\dfrac{5x-1}{x+1}=\log_3 3$. **2 pont**

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt: $\dfrac{5x-1}{x+1}=3\quad/\cdot(x+1)$ **2 pont**

$$5x-1=3x+3\quad/-3x;+1.$$

Innen $x=2$. **2 pont**

Ha az $x>\dfrac{1}{5}$ feltételt nem adtuk meg, akkor a megoldást le kell ellenőriznünk.

Ellenőrzés:

$\log_3(5\cdot2-1)-\log_3(2+1)=\log_3 9-\log_3 3=2-1$ fennáll, így az egyenlet megoldása $x=2$.

8 pont

II. B

16. **a)** Legyenek a gömbök sugarai: r; rq; rq^2, ahol q a mértani sorozat kvóciense, amelyről feltehető, hogy $q \geq 1$! A sugarakat cm-ben mérjük.

A gömb térfogatára vonatkozó $V = \frac{4R^3\pi}{3}$ összefüggés alapján 1 gyertyasorozat térfogata:

$$(1)\quad \frac{328{,}5\pi \cdot 1000\ \text{cm}^3}{1000} = \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \left(1 + q^3 + q^6\right),\ \text{ahonnan}$$

$$246{,}375 = r^3 \cdot \left(1 + q^3 + q^6\right).$$

3 pont

A legnagyobb gömb sugara $6\ \text{cm} \Rightarrow (2)\ rq^2 = 6 \Rightarrow r = \frac{6}{q^2}$ behelyettesítve (1)-be, rendezés után

$$(1)\quad 30{,}375q^6 - 216q^3 - 216 = 0 \quad /:30{,}375$$

$q^6 - \frac{64}{9}q^3 - \frac{64}{9} = 0$ q^3-re nézve másodfokú egyenlethez jutunk.

3 pont

$(q^3)_{1;2} = \frac{\frac{64}{9} \pm \sqrt{\frac{4096}{81} + \frac{256}{9}}}{2}$, amelyből $q \geq 1$ miatt $q^3 = 8 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow r = \frac{6}{q^2} = 1{,}5$ cm.

Így a gyertyasorozat gömbjeinek sugarai: 1,5 cm; 3 cm; 6 cm.

4 pont

10 pont

b) A sérült gyertyasorozatok száma: $1000 \cdot 0{,}05 = 50$.

1 pont

Az épek száma: 950.

1 pont

A keresett valószínűség:

$$\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{\binom{50}{1} \cdot \binom{950}{1} + \binom{50}{2} \cdot \binom{950}{0}}{\binom{1000}{2}} = 0{,}0975.$$

2 pont

4 pont

c) Tervezett árbevétel (1000 db eladási ára): $1000 \cdot 1900 = 1\,900\,000$ Ft.

1 pont

Hibátlan termékeinek egységára ugyanekkora árbevétel esetén:

$\frac{1\,900\,000}{950}$ Ft $= 2000$ Ft.

1 pont

Áremelkedés %-ban: $\frac{2000-1900}{1900}\cdot 100 = 5{,}26\%$. 1 pont

3 pont

17. **a)** A számtani sorozat első három tagja: $a - d$, a, $a + d$, ahol d a számtani sorozat differenciája. 1 pont

A feladat feltételei szerint:

(1) $a - d + a + a + d = 36$;

(2) $(a - d)^2 + a^2 + (a + d)^2 = 482$. 1-1 pont

Az (1) alatti egyenletből $a = 12$ adódik. 1 pont

Az $a = 12$ értéket a (2) egyenletbe helyettesítve, rendezés után a $2d^2 = 50$ egyenletet kapjuk. 2 pont

Innen $d = \pm 5$. 1 pont

7 pont

b) A $2x^2 - 3x + 1 = 0$ gyökei: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. 1-1 pont

Mivel a másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, 1 pont

ezért az egyenlőtlenség megoldása: $x < \frac{1}{2}$ vagy $x > 1$. 2 pont

5 pont

c) Az utolsó számjegy az 5-tel való oszthatóság miatt csak 0 vagy 5 lehet. 1 pont

Ha az utolsó helyi értéken a 0 számjegy áll, akkor $5 \cdot 4$-féle szám lehet. 1 pont

Ha az utolsó helyi értéken az 5 számjegy áll, akkor az első helyi értéken nem állhat 0. 1 pont

Ekkor $4 \cdot 4$ lehetőség van. 1 pont

Tehát összesen $5 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 36$ db, a feltételeknek megfelelő szám készíthető. 1 pont

5 pont

18. **a)** Az adatokat rendezzük monoton, nem csökkenő sorrendbe:
$-9,-8,-8,-8,-2,-1,-1,0,19$!
A szokásos jelöléseket használva: $Mo=-8$, $Me=-2$, $R=28$, $\bar{x}=-2$. **4x1 pont**

Innen a keresett pontok: $A(-2;7)$ és $B(-8;-2)$. **1-1 pont**

6 pont

b) A kör középpontja a CD szakasz felezőpontja: $K(-4;3)$. **1 pont**

A kör sugarának nagysága a CK szakasz hosszával egyenlő: $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$.
1 pont

A CD átmérőjű k kör egyenlete: $(x+4)^2+(y-3)^2=25$. **2 pont**

4 pont

c) Azon pontok halmaza a síkon, amelyekből egy adott CD szakasz derékszög alatt látszik, a CD átmérőjű kör, a C és D pontok kivételével. **1 pont**

Így a keresett pontok a k kör és az y tengely közös pontjai, melyek koordinátái az alakzatok egyenleteiből álló egyenletrendszer megoldásai. Az y tengely egyenesének egyenlete: $x=0$. **1 pont**

(1) $x=0$,

(2) $(x+4)^2+(y-3)^2=25$.

Az $x=0$-t a (2) egyenletbe helyettesítve: $y^2-6y=0$ egyenletet kapjuk.
1 pont

Ahonnan a keresett pontok koordinátái: $(0;0)$ és $(0;6)$. **2 pont**

5 pont

d) A P pont akkor és csakis akkor illeszkedik a körvonalra, ha a $(-6+3)^2+(7-3)^2=17$ egyenlőség teljesül. **1 pont**

Mivel $25\neq17$, ezért a P pont nem illeszkedik a körvonalra. **1 pont**

2 pont