

1. HALMAZOK

1.1. A halmaz mint alapfogalom

A halmaz és annak eleme a matematikában alapfogalmak, azaz nem definiáljuk őket. Akkor mondhatjuk, hogy adott tulajdonságú dolgok együttese, összessége halmaz, ha el tudjuk dönteni, hogy minden elemére teljesül-e az adott tulajdonság, vagy sem. Ha egy dologra áll a halmazt definiáló tulajdonság, akkor azt mondjuk, hogy az a halmaz eleme.

Példa: Jelölje az A halmaz Magyarország jelenlegi megyeszékhelyeit! Ennek a 19 elemű halmaznak Kaposvár eleme, Szentes azonban nem.

Jelölése: $\text{Kaposvár} \in A$, illetve $\text{Szentes} \notin A$.

1.2. Halmazok megadása

Egy halmazt többféleképpen is megadhatunk:

■ Elemeinek felsorolásával.

Minden elemet kapcsos zárójel között sorolunk fel pontosan egyszer.

Példa: $A = \{1; 2; 3; 4\}$
 $B = \{2; 4; 6; 8; 10; \dots\}$

■ A halmazt definiáló tulajdonság megadásával.

Példa: $C = \{10\text{-nél kisebb egész számok}\}$ ezt úgy is írhatjuk, hogy egy vonal mögé írjuk a feltételt: $C = \{x \mid x < 10 \text{ és } x \in \mathbb{Z}\}$.

Definíció: Két halmazt egyenlőnek nevezünk, ha ugyanazokat az elemeket tartalmazzák.

Példa:

$$A = \{5; 10; 15; 20; 25; \dots\}$$

$$B = \{5\text{-tel osztható pozitív egész számok}\}$$

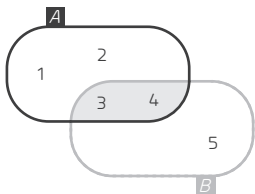
$$A = B$$

1.3. Halmazok ábrázolása

A halmazokat Venn-diagrammal ábrázolhatjuk.

Példa:

$$A = \{1; 2; 3; 4\} \text{ és } B = \{3; 4; 5\}$$



1.4. Véges és végtelen halmazok

Definíció: Ha egy halmaznak nincs eleme, akkor azt üres halmaznak nevezzük. Jelölése: $\emptyset$ vagy $\{\}$.

Vigyázat! A két jelölés nem összemosható. A $\{\emptyset\}$ jelölés az üres halmazt tartalmazó (tehát egyelemű) halmazt jelöli.

Definíció: Ha egy halmaznak véges sok eleme van (tehát elemeinek száma egy természetes számmal megadható), akkor véges halmaznak nevezzük.

Definíció: Ha egy halmaz elemeinek száma nem adható meg egy természetes számmal, akkor azt a halmazt végtelen halmaznak nevezzük.



Definíció: Ha egy végtelen halmaz elemei kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozhatók a természetes számok halmazának elemeivel, akkor a halmazt megszámlálhatóan végtelennek nevezzük.

Példa: Az egész számok halmaza megszámlálhatóan végtelen.

Definíció: Ha egy halmaz elemei kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozhatók a valós számok halmazának elemeivel, akkor az adott halmazt kontinuum végtelennek nevezzük.

Példa: Egy adott e egyenes pontjainak halmaza.

1.5. Részhalmazok

Definíció: Ha egy A halmaz minden eleme B halmaznak is eleme, akkor az A -t a B részhalmazának nevezzük. Jelölése: $A \subseteq B$.

A definícióból adódóan minden A halmazra igaz, hogy

$$A \subseteq A,$$

$$\emptyset \subseteq A.$$

Definíció: A halmaz B halmaz valódi részhalmaza, ha A minden eleme B halmaznak is eleme, de B nem egyenlő A -val. Jelölése: $A \subset B$.

Példa: $\{a;b;c;d\} \subset \{\text{a magyar ábécé betűi}\}$

Tétel: Két halmaz akkor és csakis akkor egyenlő, ha egymás részhalmazai, azaz ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.

Tétel: Egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

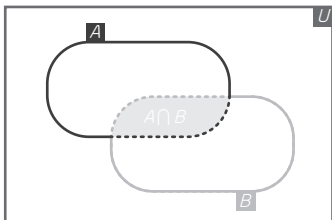
1.6. Műveletek halmazokkal

Két halmaz metszete (vagy közös része)

Definíció: Az A és B halmazok metszetének azon elemek halmazát nevezzük, amelyek A és B halmaznak is elemei. Jelölése: $A \cap B$.

Vagyis:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}.$$



A metszet tulajdonságai (bármely A , B és C halmaz esetén):

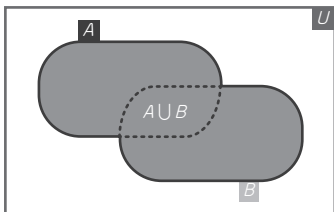
1. kommutatív művelet, azaz $A \cap B = B \cap A$,
2. asszociatív művelet, azaz $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
3. $A \cap A = A$,
4. $\emptyset \cap A = \emptyset$.

Két halmaz uniója (vagy egyesítése)

Definíció: Az A és B halmazok uniójának azon elemek halmazát nevezzük, amelyek A -nak vagy B -nek elemei. Jelölése: $A \cup B$.

Vagyis:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$



Az unió tulajdonságai (bármely A, B és C halmaz esetén):

1. kommutatív művelet, azaz $A \cup B = B \cup A$,
2. asszociatív művelet, azaz $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
3. $A \cup A = A$,
4. $\emptyset \cup A = A$,
5. a metszet az unióra nézve, illetve az unió a metszetre nézve disztributív, azaz $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, illetve $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

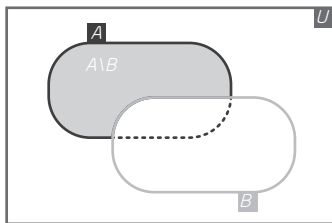
Két halmaz különbsége (vagy differenciája)

Definíció: Az A és B halmazok különbségének nevezzük azon elemek halmazát, amelyek A -nak elemei, de B -nek nem elemei. Jelölése:

$A \setminus B$.

Vagyis:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$



A különbség tulajdonságai:

1. nem kommutatív, azaz van olyan A és B halmaz, hogy $A \setminus B \neq B \setminus A$,
 2. nem asszociatív, azaz van olyan A, B és C halmaz, hogy $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$,
 3. $A \setminus A = \emptyset$,
 4. $A \setminus \emptyset = A$,
 5. $\emptyset \setminus A = \emptyset$,
- } bármely A halmaz esetén.

Két halmaz szimmetrikus differenciája



Definíció: Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája az a halmaz, amely tartalmazza A és B nem közös elemeit és csak azokat. Jelölése: $A \Delta B$.

$$\text{Vagyis: } A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

A szimmetrikus differencia tulajdonságai (bármely A , B és C halmaz esetén):

1. kommutatív, azaz $A \Delta B = B \Delta A$,
2. asszociatív, azaz $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$,
3. $A \Delta \emptyset = A$,
4. $A \Delta A = \emptyset$.

Két halmaz Descartes-féle (vagy direkt) szorzata

Definíció: Az A és B halmazok Descartes-féle szorzatán azon rendezett elempároknak a halmazát értjük, amelyek első komponense A , második komponense B eleme. Jelölése: $A \times B$ (kiolvastva: „ A kereszt B ”),

$$\text{vagyis: } A \times B = \{(x; y) | x \in A \text{ és } y \in B\}.$$

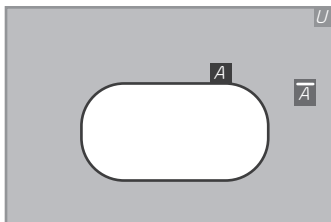
A Descartes-féle szorzat tulajdonságai:

1. nem kommutatív, azaz van olyan A és B halmaz, hogy $A \times B \neq B \times A$,
2. nem asszociatív, azaz van olyan A , B és C halmaz, hogy $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.

Komplementer (vagy kiegészítő) halmaz

Definíció: Legyen U az alaphalmaz, s ennek A valamely részhalmaza! Az A komplementer halmaza tartalmazza U azon elemeit, és csak azokat, amelyek A -nak nem elemei. Jelölése: $\bar{A}$, vagyis:

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U \text{ és } x \notin A\}.$$



A komplementer tulajdonságai

Jelölje U az alaphalmazt és legyen $A \subseteq U$!

1. $\bar{\bar{U}} = \emptyset$,
2. $\bar{\emptyset} = U$,
3. $\bar{\bar{A}} = A$.

Példa: $U = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$, $A = \{1;2;3;4;5\}$ és $B = \{2;4;6;8\}$

$$A \cap B = \{2;4\};$$

$$A \cup B = \{1;2;3;4;5;6;8\};$$

$$A \setminus B = \{1;3;5\};$$

$$B \setminus A = \{6;8\};$$

$$A \Delta B = \{1;3;5;6;8\};$$

$$\bar{A} = \{6;7;8\};$$

$$\bar{A} \times B = \{(6;2);(6;4);(6;6);(6;8);(7;2);(7;4);(7;6);(7;8);(8;2);(8;4);(8;6);(8;8)\}$$

1.7. Nevezetes számhalmazok

Természetes számok halmaza: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$.

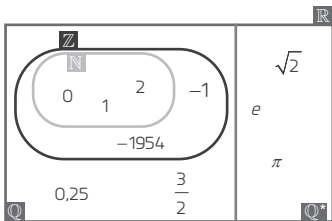
Egész számok halmaza: $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.

Racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ és } q \neq 0 \right\}$, azaz

olyan számok halmaza, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként.

Irracionális számok halmaza: $\mathbb{Q}^*$, azaz olyan számok halmaza, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként.

Valós számok halmaza:
 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$.



1.8. Intervallumok

Definíció: Legyen $a < b$! Az $[a; b]$ balról és jobbról zárt intervallum az a -nál nagyobb vagy egyenlő és a b -nél kisebb vagy egyenlő valós számokat jelöli.

Vagyis: $[a; b] = \{x \mid a \leq x \leq b \text{ és } x \in \mathbb{R}\}$

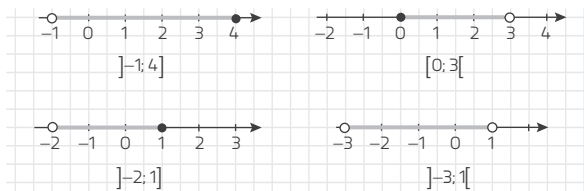
Definíció: Nyitottnak nevezzük az intervallumot valamelyik végéről, ha a végpont nem eleme az intervallumnak.

Példa: $]a; b] = \{x \mid a < x \leq b \text{ és } x \in \mathbb{R}\}$

$]a; b[= \{x \mid a < x < b \text{ és } x \in \mathbb{R}\}$

Definíció: Az $[a; \infty[$ intervallum jelöli valamennyi a -nál nagyobb vagy egyenlő számot. Az intervallum a ∞ -nél mindig nyitott. Ha egy intervallumot számegegyenesen ábrázolunk, akkor a zárt végét teli, a nyitott végét üres karikával jelöljük.

Példa:



Mivel az intervallumok számhalmazokat jelölnek, így a halmazműveletek elvégezhetőek rajtuk.

Példa:
$$\begin{aligned}]-2; 4] \cup [3; 9[&=]-2; 9[\\ [3; \infty[\cap]-\infty; 6[&= [3; 6[\\ [2; 10[\setminus [5; 15[&= [2; 5[\end{aligned}$$

1.9. Az alapl műveletek elvégezhetősége a nevezetes számhalmazokon

Definíció: Egy halmaz egy adott műveletre nézve zárt, ha az adott műveletet a halmaz bármely elemeivel végezve, eredményül a halmazba tartozó elemet kapunk. Ha az eredmény nem mindig eleme az adott halmaznak, akkor a művelet kivezet a halmazból, vagy a halmaz az adott műveletre nézve nyitott.

Három alapművelet a nevezetes számhalmazokon:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{R}$
Összeadás	zárt	zárt	zárt	nyitott	zárt
Kivonás	nyitott	zárt	zárt	nyitott	zárt
Szorzás	zárt	zárt	zárt	nyitott	zárt

1.10. Halmazok számossága

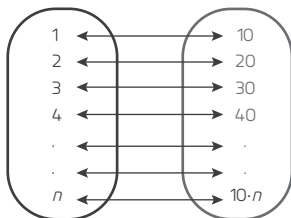
Definíció: Egy véges halmaz elemeinek számát a halmaz számosságának nevezzük. Jelölése: $|A|$.

Példa: Ha $A = \{a, b, c, d, e\}$, akkor $|A| = 5$.

Vigyázat! Mivel a véges halmazok számossága egy konkrét nem negatív egész szám, ezért ezt nem tesszük kapcsos zárójelbe.

Tétel: Két halmaz számossága megegyezik, ha elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés hozható létre.

Példa: Legyen A a pozitív egész számok, B a 10-zel osztható pozitív egész számok halmaza. Ekkor bármely $n \in A$ -nak megfeleltethetjük a B halmaz $10n$ elemét. Mivel a két halmaz elemei között létesíthető kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, így számosságuk megegyezik, azaz $|A| = |B|$.





Definíció: A természetes számok halmazának számosságát a héber ábécé első betűjével és 0 alsó indexszel, azaz $\aleph_0$ -al (olvasd: alef null) jelöljük.

Tétel: $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

1.11. Logikai szita

Bármely két halmazra: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Példa: Egy osztályban 25 tanuló a francia, 20 az angol, 10 mindkét nyelvet tanulja. Minden diák tanulja a két fenti nyelv egyikét. Hányan járnak az osztályba?

Válasz: Az osztály létszáma $25 + 20 - 10 = 35$.

Bármely három halmazra:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - \\ &\quad - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Előszó	5
I. GONDOLKODÁSI MŰVELETEK	6
1. Halmazok	6
2. Kombinatorika	17
3. Logika	21
4. Bizonyítási módszerek	25
5. Gráfok	27
II. ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET	32
1. Betűs kifejezések, nevezetes azonosságok	32
2. Hatványozás	37
3. Gyökvonás	42
4. Logaritmus	44
5. Egyenletek	46
6. Egyenlőtlenségek	61
7. Egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek	66
8. Középértékek, nevezetes egyenlőtlenségek	71
9. Számelmélet	73
III. GEOMETRIA ÉS TRIGONOMETRIA	80
1. Geometriai alapok	80
2. Geometriai transzformációk	90
3. Háromszögek	101
4. Négyszögek	111
5. Sokszögek	117
6. Kör és részei	119
7. Testek felszíne és térfogata	123
8. Vektorok	128
9. Trigonometria	131
10. Koordináta-geometria	136
IV. FÜGGVÉNYEK ÉS ANALÍZIS	146
1. Függvények elemi vizsgálata	146
2. Számsorozatok	174
3. Határérték-számítás	187
4. Differenciálszámítás	192
5. Integrálszámítás	204
V. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS ÉS STATISZTIKA	218
1. Leíró statisztika	218
2. Valószínűség-számítás	225
VI. TÁRGYMUTATÓ	240